

大学基础物理学习指导 与习题解析 (第二版)

郑勇林 杨 维 朱晓玲 杨 敏 杨 阔 编著

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是与《大学基础物理学》(上、下)配套的辅导教材。本书从科学技术的发展和工程技术人才培养的总体要求出发,兼顾实用性和先进性,内容覆盖了所有需要掌握的基本理论和方法。书中对每章的教学重点和主要内容进行了梳理和总结,精选例题和习题解析有助于提高读者的理解、分析和解决问题的能力。

本书可作为高等学校非物理类专业大学物理课程的辅助教材,也可供相关领域的工程技术人员、研究生学习参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

大学基础物理学习指导与习题解析 / 郑勇林等编著. — 2 版. — 北京: 电子工业出版社, 2018.1
ISBN 978-7-121-33049-0

I. ①大… II. ①郑… III. ①物理学—高等学校—教学参考资料 IV. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 280706 号

策划编辑: 张小乐

责任编辑: 张小乐 特约编辑: 刘闻雨

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1 092 1/16 印张: 21.75 字数: 557 千字

版 次: 2014 年 3 月第 1 版

2018 年 1 月第 2 版

印 次: 2018 年 1 月第 1 次印刷

定 价: 49.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式: (010) 88254462, zhxl@phei.com.cn。

前 言

本书第一版已出版近 4 年，应出版社之约，本书将出版第二版。读者的反馈意见及教师在教学中的经验反映出第一版内容略显简单，学生完成配套教材作业时还有一定困难，也不易把握知识的重点和难点，因此还有待细化与改善。

这次修订整体框架没有大的变化，但对内容做了较大幅度的调整，增加了部分章节及知识点，并做了一定的扩展描述。例如，第 1 章增加了重力、弹力和摩擦力等知识点；新增第 2 章刚体和流体内容；第 4 章将静电场及静电场中的导体、电介质融合为一体，增加了部分知识点，使知识的系统性更强；第 5 章增加了几种常见电流的磁场分布、霍尔效应、有磁介质存在时的磁场等内容；第 7 章将振动、波动联系在一起，增加了横波、纵波以及描述波动的物理量、波的能量、波的叠加原理等知识点；第 8 章增加了几何光学内容；在第 10、11 章中，重写了量子力学和现代高新技术章节中的部分内容。量子力学、分子与固体在近代物理学知识中占有相当的比例，其中研究的范围着重在 $10^{-10} \sim 10^{-2} \text{ m}$ 区间，而在这个区间固体的结构及电、磁、光、热等的性质的研究都获得了巨大的成功，而且这方面还有巨大的应用潜力，所以，在这部分增加了与现代高科技密切相联系的知识。

修订版最大的亮点是增加了与教材相配套的习题解析，习题解析中有每一题包含的知识点、解题思路及解答过程。习题的选取尽量覆盖对应教材的知识点，习题类型涵盖选择题、填空题、证明题、计算及综合应用题等，部分题目直接与物理实验和实际工程相联系，例如，在分子与固体的习题中有计算固体热容、物体弹性模量的题目。总之，第二版希望能更好地体现作者将知识与应用相结合的思想，希望能更好地帮助读者答疑解惑，巩固和扩展相应的物理知识。

本次修订中，杨敏、朱晓玲、郑勇林改写了第 1 章、第 7 章、第 9 章的相关内容并完善了习题解答；王晓茜、郑勇林、杨阔改写了第 2 章的内容并完善了习题解答；杨维改写了第 3 章、第 6 章内容并完善了习题解答；郑勇林、喻文翠改写了第 4 章、第 5 章、第 9 章、第 10 章、第 11 章的内容并完善了习题解答；郑勇林、杨敏、杨阔改写了第 8 章并完善了习题解答。郑勇林、杨维对全书进行了审核。全书由郑勇林统稿。

本书的修订出版要感谢电子工业出版社和本书的责任编辑张小乐，没有其鼓励很难完成这项工作。要感谢成都大学教务处的支持和教务处长杨明娜教授的支持和鼓励。这次修订中长江师范学院、阿坝师范学院、四川交通职业技术学院的老师提了很多中肯的意见和宝贵的建议，在此表示感谢。还要感谢在第一版中做了大量工作的刘鸿、赵茂娟、戴松晖、卢孟春、孙婷雅等老师。

长江师范学院周晏副教授为本书做了大量工作，在此表示感谢。

由于编者水平有限，书中仍可能存在不妥甚至错误之处，敬请批评指正。

郑勇林

2017 年 10 月于碧落湖

第一版前言

为了更好地适应我国高等教育发展,满足目前社会对一般高等学校大众化教育背景下人才培养的各项要求,进一步探索和完善我国高等学校应用型人才培养体系,积极探索适应 21 世纪人才培养的教学模式,我们根据教育部非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会制定的《理工科非物理类专业大学物理课程教学基本要求》(后简称“纲要”)的思想和精神,编写了《大学基础物理学》(上、下)(郑勇林、杨维、卢孟春、赵茂娟等编著)教材及《大学基础物理学学习指导》辅导教材。

大学基础物理是工科大学生学习其他后续课程的基础课,是一门全面、系统地培养学生综合素质的课程。大学基础物理课程的学习,可以培养学生科学的思维方式和研究问题的方法,能开阔学生思路,激发学生的探索和创新精神,提高学生科学素养,增强社会适应能力。同时,相应的学习指导和习题又是帮助学生理解和掌握物理学基本概念、基本规律、基本方法的必要手段,也是培养学生掌握科学的学习方法,培养独立获取知识和解决问题的能力的有效途径。为了帮助学生更好地学好大学物理基础知识和解题方法,我们根据多年的教学经验编写了本书。

本书共 11 章,与《大学基础物理学》(上、下)教材配套使用,但本书在章节的编排上相对教材具有一定独立性,以体现学习指导书的特征,同时也能对不使用配套教材的读者学习大学基础物理学提供学习指导。

本书符合一般院校大学物理课程的教学要求并方便课堂教学,覆盖了需要掌握的基本理论和方法,精选了大学物理课程教学内容的知识点,每章按学习要求、内容提要、重点难点分析、精选例题与习题解答等几部分编写。学习要求部分,遵照“纲要”精神分为了解、理解、掌握和熟练掌握 4 个层次对学生提出不同要求,为教学不同的对象提供了理论依据。内容提要概述了本章需要掌握的基本概念、基本公式、定律和方法,重要的知识点等内容,从易于学生理解的角度给出一定的分析阐述。重点难点分析部分,一是指导教学双方理清思路,抓住主线,正确把握相关知识内容的教与学;二是对本章难点之处进行分析讨论,提出具体的解决方法。精选例题与习题解答部分主要从本章难于理解的知识点入手,对相关知识的应用给出一定的解题方法及关键步骤,旨在帮助学生学会运用基本理论分析实际问题。题目中考查了基本概念、知识点的一般应用、综合应用等。

本书第 1~3 章由赵茂娟、王晓茜、戴松晖编写,第 4~8 章由刘鸿、杨维、朱晓玲、陆智编写,第 9~11 章由郑勇林、卢孟春、孙婷雅、朱晓玲编写,李伯恒、陆智参加了例题、习题的编写及本书的讨论。全书由郑勇林统稿。

本书在编写过程中得到了成都大学教务处、长江师范学院教务处的大力支持,编者在此致以衷心的感谢。

西南大学郑瑞伦教授仔细审阅了书稿并提出许多修改意见,在此表示感谢。

成都大学汪令江教授，长江师范学院周晏副教授为本书编写做了大量工作，在此表示感谢。

本书编写中参考了其他出版社的同类资料，在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中可能存在不妥甚至错误之处，敬请批评指正。

编 者

2014 年 8 月于成都

目 录

前言

第 1 章	质点运动学 质点动力学	1
1.1	学习要求	1
1.2	内容提要	2
1.3	重点难点分析	13
1.4	精选例题与习题解答	13
第 2 章	刚体和流体	44
2.1	学习要求	44
2.2	内容提要	45
2.3	重点难点分析	51
2.4	精选例题与习题解答	51
第 3 章	气体动理论 热力学基础	73
3.1	学习要求	73
3.2	内容提要	74
3.3	重点难点分析	84
3.4	精选例题与习题解答	84
第 4 章	静电场	102
4.1	学习要求	102
4.2	内容提要	103
4.3	重点难点分析	116
4.4	精选例题与习题解答	117
第 5 章	稳恒磁场	147
5.1	学习要求	147
5.2	内容提要	147
5.3	重点难点分析	154
5.4	精选例题与习题解答	154
第 6 章	麦克斯韦电磁场理论	175
6.1	学习要求	175
6.2	内容提要	175
6.3	重点难点分析	182

6.4	精选例题与习题解答	183
第 7 章	振动 波动	197
7.1	学习要求	197
7.2	内容提要	198
7.3	重点难点分析	212
7.4	精选例题与习题解答	213
第 8 章	光学* 波动光学	244
8.1	学习要求	244
8.2	内容提要	245
8.3	重点难点分析	257
8.4	精选例题与习题解答	258
第 9 章	狭义相对论基础	279
9.1	学习要求	279
9.2	内容提要	280
9.3	重点难点分析	284
9.4	精选例题与习题解答	285
第 10 章	量子力学基础	300
10.1	学习要求	301
10.2	内容提要	301
10.3	重点难点分析	311
10.4	精选例题与习题解答	311
第 11 章	分子与固体 现代高新技术	324
11.1	学习要求	324
11.2	内容提要	324
11.3	重点难点分析	333
11.4	精选例题与习题解答	333

第1章 质点运动学 质点动力学

物质最普遍、最基本的运动形式包括机械运动、分子热运动、电磁运动、原子和原子核运动以及其他微观粒子运动等。宏观物体之间（或物体内部各部分之间）的相对位置变动，称为机械运动。物理学中研究机械运动的规律及其应用的部分称为力学。通常把力学分为运动学、动力学和静力学。运动学描述物体的位置随时间的变化或运动轨道问题而不涉及引起运动和运动变化的原因；动力学则研究物体的运动与物体间相互作用的内在联系；静力学研究物体在相互作用下的平衡问题。

质点运动学，从最简单的质点模型出发，研究描述质点运动的物理量（位置矢量、位移、速度和加速度、质点运动方程、切向加速度和法向加速度）、运动的叠加性和相对运动及物体位置随时间的变化或运动轨道等问题。引入了数学上的导数运算和积分运算，从而可以对运动的相对性、瞬时性和矢量性等基本性质进行清晰的阐述。

质点动力学，是以牛顿运动定律为基础，研究物体运动状态发生改变时所遵守的规律的科学。宏观物体的运动一定程度上遵循这些规律。物体间的相互作用称为力。某物体受力作用后，其运动状态就会发生相应的变化。在大学物理中可以从两个不同的角度研究力对物体作用的影响：一是力作用的时间累积作用效果，从而引出动量定理、角动量定理；二是研究力的空间累积作用效果，从而引出动能定理。当作用在物体上的力等于零时，反映出动量守恒、角动量守恒定律及能量守恒定律。这些定律是自然界最基本、最普遍的规律，需要认真去理解。

1.1 学习要求

1. 质点运动的描述

- (1) 理解质点模型及参考系的概念。
- (2) 掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述质点运动的物理量；理解平面曲线运动的角位移、角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度等概念。
- (3) 能在直角坐标系下计算质点空间运动时的速度、加速度；理解自然坐标系，能计算质点圆周运动的角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度。理解伽利略相对性原理，会利用伽利略坐标、速度变换式分析相对运动问题。

2. 牛顿运动定律

- (1) 掌握牛顿三定律及其适用条件，熟练运用隔离法和整体法分析物体受力；会分析三种基本力——万有引力、弹性力和摩擦力。
- (2) 熟练掌握运用微积分方法求解一维变力作用下的简单质点的动力学问题。

(3) 正确理解质量、力等基本概念;理解质心概念和质心运动定律;理解质点系的内力和外力。

(4) 了解惯性系与非惯性系的基本概念。

3. 运动的守恒定律

(1) 掌握功的概念,会计算质点直线运动时变力的功;掌握保守力做功的特点及势能的概念;会计算重力、弹性力、万有引力的势能。理解势能曲线,能从势函数求得保守力。

(2) 掌握质点、质点系的动能定理、动量定理和动量守恒定律;掌握质点、质点系的角动量定理和角动量守恒定律,并能分析、解决运动质点的力学问题;掌握机械能守恒定律,并能熟练应用功能关系解决一些简单实际的问题;了解三大守恒定律与时间空间对称性的关系。

(3) 了解完全弹性碰撞和完全非弹性碰撞的特点。

1.2 内容提要

1. 基本概念

(1) 质点

把物体视为一个具有一定质量而大小可忽略的几何点,这样的几何点称为质点。质点是物体的一种理想模型。例如,导航地图中显示的移动的汽车、雷达屏幕上显示的飞行的飞机等就被看成一个质点。

(2) 参考系与坐标系

为了描述物体的运动而被选定的参考物体称为参考系。为了定量描述物体相对参考系的位置与运动情况,在选定的参考系上建立带有标尺的数学坐标,称为坐标系。在科学研究中通常选用的坐标系有直角坐标系、自然坐标系、柱坐标系和球坐标系等。

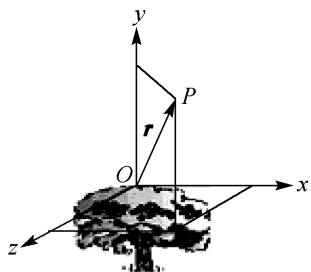


图 1.1 位置矢量

(3) 描述质点运动的物理量

① 位置矢量。在坐标系中质点的位置用一个被称为位置矢量(简称位矢)的矢量来描述。在参考系中任意取定一点 O 作为参考点,如图 1.1 所示,从 O 点指向质点在某一时刻所处的位置 P ,作一矢量 \mathbf{r} ,称为质点在该时刻的位矢,即

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$$

在直角坐标系中,位矢 \mathbf{r} 可表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1-1)$$

其中, P 点的位置坐标 x 、 y 、 z 就是该点位矢 \mathbf{r} 在直角坐标系 $Oxyz$ 中沿各轴的分量。直角坐标系 $Oxyz$ 中各轴 Ox 、 Oy 、 Oz 的正方向分别用相应的单位矢量 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 表示,而 $\mathbf{r}_x = x\mathbf{i}$, $\mathbf{r}_y = y\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_z = z\mathbf{k}$ 是位矢 \mathbf{r} 的三个分矢量。

质点的位置矢量 \mathbf{r} 随时间 t 的变化关系及在直角坐标系中的表达式为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1-2)$$

式(1-2)称为质点的运动方程,其中 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 是直角坐标系中运动方程的分量式。质点运动时在空间所经历的路径,称为轨迹,轨迹的数学表达式,称为轨迹方程。在直角坐标系中,从运动方程分量式 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 中消去时间 t ,即可得到轨迹方程 $f(x,y,z)=0$ 。

② 位移。位移是指自运动始点指向终点的有向直线线段。它描述质点在某段时间内位置的变化,为

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (1-3)$$

位移是位置矢量的增量。

③ 速度。速度是描述质点运动快慢和运动方向的物理量,速度的大小称为速率。

$$\text{平均速度:} \quad \bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1-4)$$

$$\text{瞬时速度:} \quad \mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1-5)$$

平均速度是位移 $\Delta \mathbf{r}$ 与时间 Δt 的比值,反映了一段时间内位置变化的平均快慢,方向与 $\Delta \mathbf{r}$ 相同。在描述质点运动时,也常采用“速率”这个物理量,把路程 Δs 与时间 Δt 的比值 $\Delta s / \Delta t$ 称为质点在时间 Δt 内的平均速率,用 $\bar{v} = \Delta s / \Delta t$ 表示。平均速度与平均速率都与 Δt 有关系,由于 $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s$,所以, $|\bar{\mathbf{v}}| \neq \bar{v}$ 。瞬时速度是位置矢量对时间的一阶导数,是 $\Delta t \rightarrow 0$ 时平均速度的极限值,反映了 t 时刻位置变化的快慢和方向,瞬时速度只与 t 有关系。位移 $\Delta \mathbf{r}$ 、平均速度 $\bar{\mathbf{v}}$ 与瞬时速度 \mathbf{v} 的关系如图1.2所示。位移沿割线 AB 的方向,当 Δt 趋于零时, B 点逐渐趋近于 A 点,相应的割线 AB 逐渐趋近于 A 点的切线,所以质点的速度方向是沿着轨迹上质点所在点的切线方向并指向前进的一侧,亦即质点位矢对时间的瞬时变化率。

速度在直角坐标中的表示为

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \quad (1-6)$$

沿坐标轴的分量分别是

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (1-7)$$

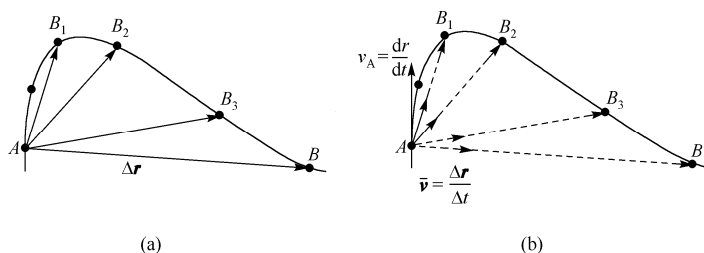


图1.2 位移 $\Delta \mathbf{r}$ 、平均速度 $\bar{\mathbf{v}}$ 与瞬时速度 \mathbf{v} 的关系

也就是说,质点运动的速度矢量在直角坐标轴上的分量等于相应的位置坐标对时间的一阶导数(标量导数)。所以速度的大小可以用下式计算:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (1-8)$$

速度的方向可用下式计算:

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v} \quad (1-9)$$

式中, α, β, γ 分别为速度矢量 \mathbf{v} 与 x, y, z 轴之间的夹角。

在自然坐标系中, 速度矢量可表示为

$$\bar{\mathbf{v}} = v\mathbf{e}_\tau = \frac{ds}{dt}\mathbf{e}_\tau \quad (1-10)$$

④ 加速度。加速度是反映质点速度矢量随时间变化的物理量。

平均加速度
$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1-11)$$

瞬时加速度
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (1-12)$$

平均加速度是速度矢量增量与时间的比值, 反映了一段时间内速度变化的平均快慢和总体方向; 瞬时加速度是速度矢量对时间的一阶导数, 反映了某瞬时速度变化的快慢和方向。

在直角坐标系中, 可将加速度用分量式表示为

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k} \quad (1-13)$$

在自然坐标系中, 加速度矢量可表示为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (1-14)$$

式中, ρ 是质点的运动轨迹上某点的曲率半径, \mathbf{e}_τ 为质点沿切向方向的单位矢量, \mathbf{e}_n 是垂直于 \mathbf{e}_τ 并指向曲率圆心的单位矢量, $\frac{dv}{dt}$ 为切向加速度, 反映速度大小的变化, $\frac{v^2}{\rho}$ 为法向加速度, 反映速度方向的变化。质点做圆周运动时曲率半径 $\rho = R$ 。

2. 描述质点运动的角量

角位置(角坐标)是指某时刻质点和坐标原点的连线与参考轴的夹角 θ 。质点运动时, 角位置随时间的变化表示为 $\theta = \theta(t)$ 。

角位移是指角位置在 Δt 时间内的变化量, 表示为 $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$ 。

角速度是指角位移对时间的变化率, 表示为

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (1-15)$$

角加速度是指角速度对时间的变化率, 表示为

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \quad (1-16)$$

线量与角量的关系（质点做半径为 R 的圆周运动时）为

$$\begin{aligned} \Delta s &= R \Delta \theta \\ v &= R \omega \\ a_{\tau} &= R \alpha \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = R \omega^2 \end{aligned} \quad (1-17)$$

3. 相对运动

不同参考系对同一个物体运动的描述是不同的，如图 1.3 所示。 $O'x'y'$ 坐标系相对于 Oxy 坐标系沿 Ox 轴以速度 u 运动，那么，一个运动质点在两个相对运动的参考系中的位移及速度关系为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \Delta \mathbf{r}' + \Delta \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1-18)$$

式中， $\Delta \mathbf{r}$ 为运动质点相对于 S 系的位矢变化， $\Delta \mathbf{r}'$ 为运动质点相对于 S' 系的位矢变化， $\Delta \mathbf{r}_0$ 为 S' 系原点对 S 系原点的位矢变化， \mathbf{v} 为质点相对于 S 系的速度， \mathbf{v}' 为质点相对于 S' 系的速度， \mathbf{u} 为 S' 系相对 S 系的速度，也称为牵连速度。

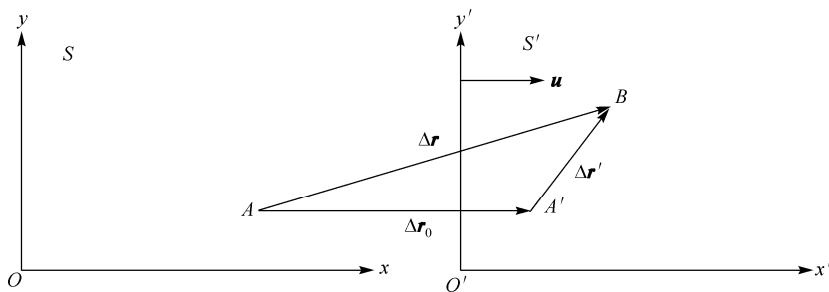


图 1.3 相对运动的描述

4. 惯性与惯性系

物体保持静止或匀速直线运动状态的特性，称为惯性。

在研究物体相对运动时，牛顿 (I. Newton) 第一定律定义了一种参考系，在这种参考系中观察，一个不受力作用的物体将保持静止或匀速直线运动的状态不变。这样的参考系称为惯性参考系，也叫惯性系。也就是说，牛顿第一定律成立的参考系是惯性系。相反，牛顿第一定律不成立的参考系称为非惯性系。

一切相对于惯性系做匀速运动的参考系都是惯性系，在这些惯性系内，所有力学现象都符合牛顿运动定律。

5. 力与力矩

(1) 力

力是物体与物体之间的相互作用, 力是矢量, 有大小和方向。它是量度物体间相互作用的物理量。它能使质点运动的状态发生变化或使物体发生形变。牛顿三条定律都涉及力, 牛顿第一、第二定律以受力物体为对象来研究力的作用效果, 牛顿第三定律则指出物体间的作用是相互的。

日常生活中常见的力有如下几种。

① 重力。重力来源于地球对物体的万有引力。由于地球自转, 地球对物体的万有引力中, 一部分提供了物体随地球一起绕地轴作圆周运动的向心力; 另一部分即为物体所受的重力。在南北两极的地轴上, 物体所受重力即为万有引力, 而在赤道上物体所受的重力等于万有引力与向心力之差。由于这种差异很小, 一般认为重力即为物体所受的万有引力, 方向垂直地面指向地心。作用在物体上的重力, 在量值上为 $W = mg$ 。式中 m 为物体的质量, g 为重力加速度。

② 弹力。弹力来源于物体之间产生的形变。物体企图恢复原状而彼此相互施加的作用力, 称为弹力。弹力的表现形式很多。其中一种为弹簧的弹性力, 这种弹力总是使弹簧恢复原状, 所以又称为恢复力, 实验证明, 这种力遵从胡克定律, 即 $f = -kx$, 式中 f 表示弹力的大小, x 表示弹簧的形变量, k 为弹簧的劲度系数, 它取决于弹簧本身的结构, 负号表示弹性力的方向与形变的方向相反。

③ 摩擦力。两个相互接触的物体在沿接触面有相对运动或有相对运动趋势时, 在接触面之间产生的一对阻止相对运动的力, 称为摩擦力。摩擦力包括静摩擦力 $f_s \leq \mu_s N$ (μ_s 为静摩擦系数, 取等号时 $f_s = f_{s\max}$, 为最大静摩擦力) 和滑动摩擦力 $f_k = \mu_k N$ (μ_k 为动摩擦系数), 式中 N 为正压力。

近代物理证明, 自然界物体之间的相互作用力可归结为 4 类: ①万有引力 $\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$ (重力属于此类); ②电磁力 (弹力、摩擦力、黏性力等相邻原子或分子之间的作用力); ③强力, 属于物质内更深层次的一种作用力; ④弱力, 属于亚原子之间的一种力。

*另一类是惯性力, 即在加速参考系中引入牛顿运动定律的力, 如在平动加速参考系中, $\mathbf{F} = -m\mathbf{a}$, 惯性离心力 $\mathbf{F}_i = -m\omega^2 r\mathbf{n}$ 。

(2) 力矩

在转动的研究中, 力矩是一个重要的概念。通常有力 \mathbf{F} 对给定点的力矩和力 \mathbf{F} 对定轴转动的力矩两个概念。

力 \mathbf{F} 对给定点 O 的力矩 M_o 表示为位矢 \mathbf{r} 与力 \mathbf{F} 的矢量积, 即

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1-19)$$

M_o 是矢量, 对于可以绕 O 点任意转动的刚体, 这个力矩矢量将决定它转动状态的变化。

力 \mathbf{F} 对给定轴 Oz 的力矩 M_z 。因为力 \mathbf{F} 可以分解为平行于转轴的分力 $F_{//}$ 和垂直于转轴的分力 F_{\perp} , 而 $F_{//}$ 对刚体转动没有贡献, 只有 F_{\perp} 能使刚体转动, 所以力 F_{\perp} 对给定轴 Oz 的力矩可表示为

$$M_z = F_{\perp} r \sin \varphi = F_{\perp} d \quad (1-20)$$

式中, φ 为转轴到力作用点半径 r 与 F_{\perp} 的夹角。

说明: 如果有几个力同时作用, 那么上述力 \mathbf{F} 可认为是几个力的合力。

6. 动量与角动量

(1) 动量

与速度类似, 动量也是描述物体运动状态的物理量, 即 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 。它是矢量, 其方向与速度方向一致。在物理学中, 用 (\mathbf{r}, \mathbf{p}) 来表示质点的运动状态比用 (\mathbf{r}, \mathbf{v}) 来表示更能体现其物理意义。因此, 也可以说动量是物体做机械运动的度量。动量的单位是 $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

(2) 角动量

质点的角动量是对某一定点而言的, 其定义为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (1-21)$$

式 (1-21) 表明角动量 \mathbf{L} 的大小为 $L = rp \sin \varphi$, 方向垂直于位矢 \mathbf{L} 和动量 \mathbf{p} 所组成的平面, 指向是由 \mathbf{r} 经小于 180° 的角转到 \mathbf{p} 的右手螺旋前进的方向。

注意: 式 (1-21) 中的 \mathbf{r} 是该质点相对给定点 O 的位矢, 参考点不同, 角动量也不同, 因此提到角动量一定要说明是对哪一个参考点而言的。

思考题: 质点做圆周运动, 以圆心为参考点的角动量是怎样的?

刚体做定轴转动的角动量定义为

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega} \quad (1-22)$$

J 与 $\boldsymbol{\omega}$ 分别是刚体绕同一固定轴的转动惯量与角速度。 \mathbf{L} 与 $\boldsymbol{\omega}$ 都是矢量, 但在定轴转动情况下, 仅有正负之分, 用代数量处理即可。

7. 冲量与冲量矩

冲量是描述力对时间累积作用的物理量。冲量定义为 $\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt$, 它是矢量, 其方向与力的方向一致 (说明: \mathbf{I} 的方向和大小要由这段时间内所有微分冲量 $\mathbf{F}(t) dt$ 的矢量和来决定, 而不是由某一瞬时的 \mathbf{F} 决定, 但在恒力作用时 \mathbf{I} 与 \mathbf{F} 同向)。上述积分中 $\mathbf{F}(t)$ 的关系一般比较复杂, 无法确切知道其具体形式。当力作用时间很短时, 为了计算方便, 常用平均冲力 $\bar{\mathbf{F}}$ 代替 $\mathbf{F}(t)$ 来计算冲量, 其关系为

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt = \bar{\mathbf{F}}(t_2 - t_1) \quad (1-23a)$$

恒力作用时, 冲量为

$$\mathbf{I} = \mathbf{F} \Delta t = \mathbf{F}(t_2 - t_1) \quad (1-23b)$$

冲量的单位是 $\text{N} \cdot \text{s}$ 。

冲量矩 (力矩的冲量) 是力矩的时间积累效应, 定义为 $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_z(t) dt$, 冲量矩是矢量。也可理解为 Δt 时间内对轴的力矩的冲量和或冲量矩之和。

8. 动量定理和动量守恒定律

(1) 动量定理

物体在运动过程中所受合外力的冲量, 等于质点(或质点系)动量的增量。其数学形式为

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \quad \text{或} \quad \mathbf{I} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 \quad (1-24a)$$

式(1-24a)是牛顿第二定律的另一种表达形式, 阐述力对时间累计效应的物理规律。其微分形式为

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p} = d\mathbf{mv} \quad (1-24b)$$

理解动量定理时注意以下几点:

① 尽管外力在运动过程中时刻改变, 物体的速度方向也可逐点不同, 但却总是遵守动量定理。即不管物体运动过程中动量变化的细节如何, 冲量的大小和方向总等于物体始末动量的矢量差。

② 动量定理不仅适用于碰撞或打击过程, 也适用于其他力学过程。式(1-24a)、式(1-24b)中的力 \mathbf{F} 是物体所受的合外力。在处理铅直方向的碰撞类问题时还应考虑重力, 当物体相互作用力远大于重力时, 重力可忽略。

③ 动量定理是由牛顿第二定律推导出的, 而牛顿第二定律只适用于惯性系, 所以动量定理也只适用于惯性系。具体应用时, 需要选择合适的坐标系, 用其在坐标轴上的分量式进行计算。

(2) 动量守恒定律

若系统所受合外力为零, 即 $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$, 则系统的总动量不随时间改变, 即

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_c = \text{常矢量} \quad (1-25)$$

这一结论称为动量守恒定律。不难看出, 系统的动量不变与质心保持匀速直线运动状态是等效的。

动量守恒定律表明, 在物体机械运动转移过程中, 系统中某一物体获得动量的同时, 必然有别的物体失去了一份与之相等的动量。所以, 动量守恒定律的深刻含义在于它是物体机械运动的一种量度。物体动量的转移反映了物体机械运动的转移。

9. 角动量定理和角动量守恒定律

(1) 角动量定理

式(1-21)和式(1-22)分别定义了质点对定点的角动量和刚体做定轴转动的角动量, 质点角动量定理和刚体角动量定理可以共同表示为

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(t) dt = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 \quad (1-26)$$

式中, $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(t) dt$ 是作用在物体上的冲量矩。式(1-26)的物理意义是, 作用于物体的冲量

矩等于角动量的增量。对于质点而言,力矩 \mathbf{M} 和角动量 \mathbf{L} 必须是对同一个参考点的;对于刚体而言,力矩和角动量必须是对同一转轴的。

定轴转动刚体的角动量定理的微分形式为

$$\mathbf{M}_z = \frac{d(J\omega)}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} \quad (1-27)$$

该式表明刚体所受到的对某给定轴的总外力等于刚体对该轴的角动量的时间变化率。该式既适用于刚体,也适用于非刚体。

(2) 角动量守恒定律

若作用于物体的合外力矩 $\mathbf{M} = 0$, 则角动量守恒, 即 $\mathbf{L} = \text{恒量}$ 。

对于质点, 有

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{恒量} \quad (1-28a)$$

对于刚体, 有

$$L = J\omega = \text{恒量} \quad (1-28b)$$

注意: 在有心力作用下, 质点对力心的角动量都是守恒的。

10. 牛顿定律

牛顿第一定律: 任何物体都保持静止或匀速直线运动状态, 直到外力迫使它改变这种状态为止。牛顿第一定律包含两个重要概念: ①任何物体都具有一种保持其原有运动状态不变的特性——惯性, 故也称为惯性定律; ②力是物体之间的一种相互作用, 它是改变物体运动状态的原因。

牛顿第一定律只对惯性参考系适用, 因而把第一定律成立的参考系称为惯性系。牛顿第一定律不能用实验直接验证, 它是在大量观察与经验的基础上, 经过抽象思维和逻辑推理得到的结果。

牛顿第二定律通常可表示为

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (1-29a)$$

式中, \mathbf{F} 为作用在物体上的合外力, \mathbf{p} 为物体的动量。牛顿本人对第二定律的表述是: 运动的变化与所加的动力成正比, 并且发生在该力所沿的直线方向上。当物体运动速度 \mathbf{v} 远小于光速时, m 可视为常量, 这时牛顿第二定律可写成

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (1-29b)$$

式中, \mathbf{F} 为作用在物体上的合外力, \mathbf{a} 为物体加速度。牛顿第二定律定量地确定了受力物体的加速度与其质量之间的关系。

应用牛顿第二定律时应注意:

① 牛顿第二定律表述的是力的瞬时作用规律, 加速度 \mathbf{a} 和所受合外力 \mathbf{F} 必须是同一时刻的瞬时量, 且有矢量关系。

② 牛顿第二定律只适用于质点或可化为质点的物体。

③ 牛顿第二定律只适用于惯性系, 在非惯性系中, 不能直接运用 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, 而该式也是在研究对象运动速度远小于光速时得到的结论。

④ 具体应用 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 时, 往往用分量式处理, 如在直角坐标系中用

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases} \quad (1-30)$$

的形式, 而在自然坐标系中的形式为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} F_n = ma_n = m \frac{v^2}{r} \\ F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt} \end{cases} \quad (1-31)$$

式中, F_n , a_n 和 F_τ , a_τ 分别表示法向和切向上的力和加速度。

牛顿第三定律: 两个物体之间的作用力和反作用力在同一直线上, 大小相等而方向相反。其数学表达式为

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}' \quad (1-32)$$

学习牛顿第三定律时应注意:

① 指出物体之间的作用力具有相互作用的特性, 受力物体同时也是施力物体, 反之亦然。作用力和反作用力总是成对出现, 它们同时产生, 同时存在, 同时消失。作用力和反作用力总是属于同种性质的力。

② \mathbf{F} , \mathbf{F}' 在同一直线上, 但作用在不同物体上。二者同存同失永远不会相互抵消。

11. 功和能

(1) 功

功是描述力对空间累积作用的物理量。功的大小等于力和位移的标积 (即乘积为一标量), 即

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \alpha dr \quad (1-33)$$

式中, α 为 \mathbf{F} 与 $d\mathbf{r}$ 的夹角。

若质点在变力作用下, 从 a 点沿曲线路径运动到 b 点, 则变力在该过程中所做的功为

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1-34)$$

功是标量, 它有正负之分。功的单位是 J (焦耳)。讲到功时, 必须明确指出是哪个力对哪个物体做功, 不能笼统地谈功。

力对定轴转动刚体所做的功表示为

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (1-35)$$

(2) 保守力的功

重力、弹力和万有引力所做的功都与运动路径无关，只与始末位置有关，即上述力做功的共同特点可以用下式表示：

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1-36)$$

把具有这种特点的一类力称为保守力。因此，式(1-36)的物理意义是：保守力 \mathbf{F} 沿任意闭合路径一周所做的功为零。或者说，保守力做功与路径无关，只与始末位置有关。

重力、弹力、万有引力做功的关系式为

$$A = mgh_1 - mgh_2 = -(mgh_2 - mgh_1) = -\Delta E_p \quad (1-37a)$$

$$A = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (1-37b)$$

$$A = -\left(G \frac{m_1 m_2}{r_1} - G \frac{m_1 m_2}{r_2} \right) \quad (1-37c)$$

(3) 动能

质点由于运动而具有的能量称为动能。质量为 m ，速度为 \mathbf{v} 的质点的动能为 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 。

(狭义相对论中指出：当质点的运动速度接近真空中的光速 c 时，质点的质量将随速度而变化。此时，它的动能由相对论给出，为 $E_k = mc^2 - m_0c^2$ ，式中， m_0 为质点的静止质量， m 为运动质量。)

刚体定轴转动时具有的动能是指刚体上所有质点的动能之和，称为该刚体的定轴转动动能。质量为 m ，定轴转动角速度为 ω 的刚体的动能为

$$E_k = \sum \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \quad (1-38)$$

(4) 势能

在物体系统中，物体之间或物体内部各部分之间由于相对位置而具有的能量称为势能，用 E_p 表示。势能是坐标的函数或称状态函数。

保守力的功 W_c 与势能 E_p 的关系是

$$W_c = -\Delta E_p = -(E_p - E_{p0}) \quad (1-39)$$

即系统内保守力所做的功等于系统势能增量的负值。式中， E_{p0} 为初态势能， E_p 为末态势能。

势能的共有性质有：

① 势能属于系统，不是单个物体所具有。

② 势能具有相对性。式(1-39)仅定义了势能的增量或势能的差值。如果要求某点的势能，就必须选择势能的零点。若在式(1-39)中选择 $E_{p0} = 0$ ，则任一点 a 的势能等于把物体从 a 点移到势能零点的过程中保守力所做的功，即

$$E_{pa} = \int_a^0 \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \quad (1-40)$$

对于重力势能,通常取地面为零势能点;对于弹性势能,取平衡位置处为零弹性势能点;对于万有引力,取无穷远处为引力势能零点。这样,这三种势能分别为

$$E_{\text{p重力}} = mgh \quad (1-41a)$$

$$E_{\text{p弹性}} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1-41b)$$

$$E_{\text{p引力}} = -G\frac{mM}{r} \quad (1-41c)$$

12. 质点的动能定理和质点系的动能定理

质点的动能定理:合外力对质点所做的功 A 等于质点动能 E_k 的增量。其数学表达式为

$$A = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k \quad (1-42)$$

质点系的动能定理:系统的外力做功 A_e 和内力做功 A_i 的总和等于系统动能 ΔE_k 的增量。其数学表达式为

$$A_e + A_i = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k \quad (1-43a)$$

13. 功能原理与机械能守恒定律

(1) 质点系的功能原理

当系统从状态 I 变化到状态 II 时,它的机械能的增量等于外力做功和非保守内力做功的总和。这个结论称为质点系的功能原理,其数学表达式为

$$A_e + A_{id} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E \quad (1-43b)$$

式中, A_e 为外力做的功, A_{id} 为非保守内力做的功。

(2) 机械能守恒定律

在一个孤立系统中,当只有保守力做功,其他内力和一切外力都不做功时,则系统内各物体的动能和势能可以互相转换,但机械能的总值不变。这个结论称为机械能守恒定律。其数学表达式为

$$\sum_i E_{ki} + \sum_i E_{pi} = \sum_i E_{ki0} + \sum_i E_{pi0} \quad (1-44a)$$

或

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \quad (1-44b)$$

(3) 能量守恒定律

一个孤立系统经历任何变化时,该系统的所有能量的总和是不变的,它只能从一种形式变为另一种形式,或从系统内一个物体转移到另一个物体。能量既不能产生,也不能消失,这就是能量守恒定律。能量守恒定律是自然界中具有最大普适性的定律之一。

1.3 重点难点分析

1. 本章重点

运动学部分的重点：①掌握力对时间的累积作用、力对空间的累积作用的概念及物理过程；②掌握质点系的运动、刚体运动的描述；③掌握动量守恒定律、能量守恒定律；④熟练掌握变力做功问题和变力的冲量问题，能熟练应用功能关系解决一些简单的实际问题，会应用动量原理和动量守恒定律。

力学部分的重点包括正确理解力学中建立的物体的理想模型（如质点、刚体），掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述各物理过程的物理量的概念及运动方程，以及相关物理量之间的关系；掌握两类具体问题的处理：①已知速度和加速度及初始条件，求质点的运动方程，②已知质点运动方程，求质点的位移、速度、加速度等物理量；正确理解几种常见力及其应用；熟练掌握牛顿三条定律及其应用。

2. 本章难点

本章的难点：①对物理学中质点、质点系、刚体等物理模型的理解，对本章中的物理概念、物理公式、定律的理解，对矢量运算、微分和积分等数学知识的应用；运用导数和积分求解变加速度、变力问题的思路和方法；②运用相关坐标系表示物理矢量和物理矢量方程的思路与方法，以及矢量方程的具体求解；③理解参考系对描述运动的物理量和物理公式的重要性。

1.4 精选例题与习题解答

1. 精选例题

例 1-1 一运动质点，在某一时刻其位矢为 \mathbf{r} ，在 Δt 时间内的路程为 Δs ，下列各式中，哪个能表示其平均速度、速度？哪个能表示其平均速率、速率？

$$(A) \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (B) \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (C) \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (D) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \quad (E) \frac{d|\mathbf{r}|}{dt} \quad (F) \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

分析与解：平均速度是矢量，是在相应的时间 Δt 内位移对时间的比值；速度是矢量，为位置矢量对时间的一阶导数；而速率是速度矢量的大小，即速度的模。所以，(B) 是平均速度，(C) 是速度，(D) 是速率，(F) 是平均速率。(A)、(E) 无物理意义。

例 1-2 质点在平面上运动，已知其位置矢量的表达式为 $\mathbf{r} = at^2\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j}$ （式中 a 、 b 为常数），则质点做（ ）。

(A) 匀速直线运动 (B) 变速直线运动 (C) 抛物线运动 (D) 一般曲线运动

分析与解：质点运动的速度和加速度表达式分别为 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2at\mathbf{i} + 2bt\mathbf{j}$ ， $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2a\mathbf{i} + 2b\mathbf{j}$ ，轨迹上任意一点处的斜率为 $\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$ 。斜率为常数，所以轨迹应为直线，加速度大小恒定，方向不变，故质点做匀变速直线运动，故选 (B)。

例 1-3 一个质点沿 x 轴做直线运动, 其运动方程为 $x = 3 + 6t + 8t^2 - 12t^3$, 则

(1) 质点在 $t = 0$ 时刻的速度 $v_0 =$ _____, 加速度 $a_0 =$ _____;

(2) 加速度为 0 时, 该质点的速度 $v =$ _____。

分析: 因为质点做直线运动, 所以可用代数计算来替代矢量运算。将运动方程 $x(t)$ 对时间求一阶导数和二阶导数可得质点的速度 $v(t)$ 、加速度 $a(t)$ 表达式, 由此可以确定任一时刻的位置、速度、加速度。对第二问可由加速度表达式令其为零, 解出时间 t , 再将 t 代入速度表达式中, 求出速度。

解: (1) 由速度、加速度的定义有

$$v = \frac{dx}{dt} = 6 + 16t - 36t^2, \quad a = \frac{dv}{dt} = 16 - 72t$$

当 $t = 0$ 时, 速度 $v_0 = 6 \text{ m/s}$, 加速度 $a_0 = 16 \text{ m/s}^2$ 。

(2) 由加速度关系: $a = 16 - 72t$, 令 $a = 0$, 则 $t = \frac{16}{72} = 0.22 \text{ s}$, 代入速度关系有

$$v = 6 + 16 \times \frac{16}{72} - 36 \times \left(\frac{16}{72}\right)^2 = 7.8 \text{ m/s}$$

例 1-4 质点的运动方程为 $\mathbf{r}(t) = 8\cos(2t)\mathbf{i} + 8\sin(2t)\mathbf{j}$ (SI) 单位, 求: (1) 质点在任一时刻的速度和加速度的大小; (2) 质点的切向加速度和运动轨迹。

分析: 已知质点运动方程 $\mathbf{r}(t)$, 对其求一阶导数和二阶导数可得质点的速度 $\mathbf{v}(t)$ 、加速度 $\mathbf{a}(t)$ 表达式, 再由速度、加速度的分量关系可求出质点在任一时刻的速度和加速度的大小。由运动方程分量表达式消去时间参数 t 可得质点的运动轨迹方程。

解: (1) 根据速度公式, 有

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -16\sin(2t)\mathbf{i} + 16\cos(2t)\mathbf{j}$$

则速度的大小为

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

根据加速度公式, 有

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -32\cos(2t)\mathbf{i} - 32\sin(2t)\mathbf{j}$$

则加速度的大小为

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 由运动方程

$$\begin{cases} r_x = x = 8\cos(2t) \\ r_y = y = 8\sin(2t) \end{cases}$$

消去参数 t 得运动轨迹方程

$$x^2 + y^2 = 64$$

由此可知, 质点做半径 $R = 8 \text{ m}$ 的圆周运动, 则

$$\begin{cases} a_n = v^2 / R = 32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ a_\tau = \text{d}v/\text{d}t = 0 \end{cases}$$

例 1-5 路灯距离地面的高度为 h , 一个身高为 l 的人在路上做匀速直线运动, 速度为 v_0 , 如图 1.4 所示, 求: (1) 人影中头顶的移动速度; (2) 影子长度增长的速率。

分析: 利用相似三角形的几何关系, 建立人影中头顶点的运动方程, 即可求得人影中头顶的移动和影子长度的变化规律。

解: (1) 建立如题图所示坐标系。设 t 时刻人位于 x' 处, 人影的头顶点位于 x 处, 由几何关系得

$$\frac{a-x}{h} = \frac{x'-x}{l}$$

即有

$$x = \frac{hx' - al}{h-l}$$

人影的头顶点移动的速度为

$$v = \frac{\text{d}x}{\text{d}t} = \frac{h}{h-l} \frac{\text{d}x'}{\text{d}t} = \frac{h}{h-l} v_0$$

式中, $\frac{\text{d}x'}{\text{d}t} = v_0$ 是人的运动速度。由于 $\frac{h}{h-l} > 1$, 所以 $v > v_0$, 即人影的头顶点移动得比人快。

(2) 人影的长度为

$$x' - x = x' - \frac{hx' - al}{h-l} = \frac{al - hx'}{h-l}$$

人影长度的变化率为

$$\frac{\text{d}(x' - x)}{\text{d}t} = -\frac{l}{h-l} v_0$$

上述变化率为负值, 表明随着人接近路灯, 人影长度将变短。

例 1-6 一质量为 1 kg 的物体, 置于水平地面上, 物体与地面之间的静摩擦系数 $\mu_s = 0.20$, 滑动摩擦系数 $\mu_k = 0.16$, 现对物体施一水平拉力 $F = t + 0.96$ (SI), 则 2 s 末物体的速度大小为多少?

分析: 本题的物理过程涉及力对时间的累积效应, 即可由力对时间的积分求出冲量, 再求速度。在 $0 \rightarrow 1 \text{ s}$ 内, $F \leq \mu_s mg = 1.96 \text{ N}$, 未拉动物体, 此时物体仍处于静止状态。当 $t > 1 \text{ s}$ 时, 拉力大于 (克服) 最大静摩擦力后, 物体开始运动, 因而可求时间在 $1 \text{ s} \rightarrow 2 \text{ s}$ 内, 力对时间积累的效果, 即在这段时间内合外力对物体的冲量。

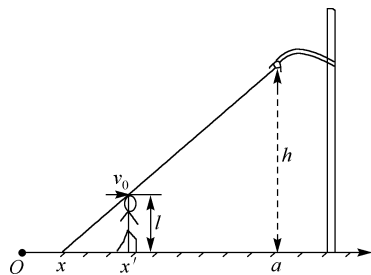


图 1.4 例 1-5 题图

解法 1: 在 $1\text{ s} \rightarrow 2\text{ s}$ 内, 力的冲量为

$$I = \int_1^2 (t + 0.96) dt - \mu_k mg(t_2 - t_1) = 0.89 \text{ N} \cdot \text{s}$$

由冲量定理可得 (初动量为 0)

$$v = I / m = 0.89 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

解法 2: 由力 F 与静摩擦力相等时, 求出时间 t , 即 $F = t + 0.96 = \mu_s mg$ 时, 有 $t = 1$ 。当 $t \geq 1\text{ s}$ 时物体开始运动, 由牛顿第二定律可得

$$F - \mu_k mg = m \frac{dv}{dt}$$

分离变量, 再积分, 可得

$$\int_0^v dv = \int_1^2 (t + 0.96 - 0.16 \times 1 \times 9.8) dt$$

得

$$v = I / m = 0.89 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

例 1-7 如图 1.5 所示, 水平地面上有一质量为 M 的物体, 静止于地面上。物体与地面间的静摩擦系数为 μ_s , 若要拉动物体, 问最小的拉力是多少? 沿何方向?

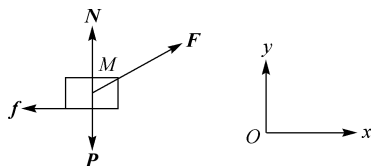


图 1.5 例 1-7 题图

分析: 由于与运动有关的力矢量分布在二维空间, 所以建立如题图所示的 Oxy 坐标系。确定研究对象为质量为 M 的物体, 经受力分析可知, 物体受重力 P , 拉力 F , 地面的支持力 N , 地面对它的摩擦力 f 。再由牛顿第二定律写出动力学方程并求解。

解: 由牛顿第二定律, 可得动力学方程为

$$\mathbf{F} + \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{f} = M\mathbf{a}$$

设 F 与 x 轴的夹角为 θ , 则沿直角坐标系的分量方程式为

$$x \text{ 分量: } F \cos \theta - f = Ma \quad (1)$$

$$y \text{ 分量: } F \sin \theta + N - P = 0 \quad (2)$$

物体启动时, 有

$$F \cos \theta - f \geq 0 \quad (3)$$

物体刚启动时, 摩擦力为最大静摩擦力, 即 $f = \mu_s N$, 由式②解出 N , 求得 f 为

$$f = \mu_s (P - F \sin \theta) \quad (4)$$

把式④代入式③中, 有

$$F \geq \mu_s Mg / (\cos \theta + \mu_s \sin \theta) \quad (5)$$

可见 $F = F(\theta)$ 。若要 $F = F_{\min}$, 则要求分母 $(\cos \theta + \mu_s \sin \theta)$ 最大。设 $A(\theta) = \mu_s \sin \theta + \cos \theta$, 求

$$\frac{dA}{d\theta} = \mu_s \cos \theta - \sin \theta = 0$$

得到

$$\tan \theta = \mu_s$$

而 $\frac{d^2 A}{d\theta^2} = -\mu_s \sin \theta - \cos \theta < 0$, 所以 $\tan \theta = \mu_s$ 时, $A = A_{\max}$, 即 $\theta = \arctan \mu_s$ 时所用拉力最小。

代入式⑤中, 得

$$F_{\min} = \mu_s Mg \sqrt{\left[\mu_s^2 \frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}} \right]} = \frac{\mu_s Mg}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$$

故 F 方向与水平方向夹角 $\theta = \arctan \mu_s$ 时, 所用拉力最小。

注意: 解该题时注意受力分析, 力学矢量(在直角坐标系中)分量式的表示, 数学分析中导数的应用。

例 1-8 有一保守力 $F = (-Ax + Bx^2)i$, 沿 x 轴作用于质点上, 式中 A 、 B 为常量, x 、 F 的单位分别是 m、N。求:

(1) 当 $x=0$ 时, $E_p = 0$, 试计算与此力相应的势能。

(2) 求质点从 $x=2\text{ m}$ 运动到 $x=3\text{ m}$ 时势能的变化。

分析: 在保守力场中任意一点 a 的势能等于把物体从 a 点移到势能零点的过程中保守力所做的功, 即 $E_{pa} = \int_a^0 \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}$ 。

解: (1) 已知势能零点位于坐标原点, 则 x 处的势能为

$$E_{px} = A_{x0} = \int_x^0 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_x^0 (-Ax + Bx^2) dx = \frac{A}{2}x^2 - \frac{B}{3}x^3$$

(2) 质点由 $x=2\text{ m}$ 运动到 $x=3\text{ m}$ 时势能的增量为

$$\Delta E_p = E_p|_{x=3} - E_p|_{x=2} = \frac{5}{2}A - \frac{19}{3}B$$

保守力做的功为

$$A = \int_2^3 F dx = -\left(\frac{5}{2}A - \frac{19}{3}B\right)$$

可见, 保守力做的功等于势能增量的负值, 即 $A = -\Delta E_p$ 。

例 1-9 在水平冰面上以一定速度向东行驶的炮车, 朝斜向上方向发射一枚炮弹, 对于炮车和炮弹这一系统, 在此过程中(忽略冰面摩擦力及空气阻力)()。

- (A) 总动量守恒
- (B) 总动量在炮身前进的方向上的分量守恒, 其他方向的动量不守恒
- (C) 总动量在水平面上任意方向的分量守恒, 竖直方向分量不守恒
- (D) 总动量在任何方向的分量均不守恒

分析: 取炮车和炮弹为一系统, 在发射炮弹过程中, 所受外力为重力和地面支持力,

均是垂直方向, 在水平方向不受外力作用, 所以总动量在水平面上任意方向的分量守恒, 竖直方向分量不守恒, 总动量不守恒, 故选 (C)。

例 1-10 在一半径为 R , 质量为 m 的静止水平圆盘的边上, 站着一个质量为 m' 的人, 圆盘可绕通过中心的竖直轴转动, 转轴与轴承之间的摩擦阻力可忽略不计。当人沿圆盘边缘走一周回到盘上原始位置时, 圆盘将转过多大角度?

分析: 取人和圆盘为定轴转动系统, 系统的角动量守恒。注意, 角动量守恒定律中人和圆盘的角速度都相对于同一惯性参考系, 人相对圆盘边缘走一周时, 人相对地转过的角度与圆盘转过的角度之和为 2π 。

解: 人、圆盘系统对竖直轴的角动量守恒, 开始时, 人和圆盘都静止, 设 t 时刻人相对地的角速度为 ω_1 , 转动惯量为 J_1 , 圆盘相对于地的角速度为 ω , 转动惯量为 J 。

由角动量守恒, 得

$$0 = J\omega + J_1\omega_1 = \frac{1}{2}mR^2\omega + m'R^2\omega_1$$

得

$$\omega = -\frac{2m'}{m}\omega_1$$

负号表示圆盘和人绕轴转动的角速度方向相反, 上式可表示为

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2m'}{m}\frac{d\theta_1}{dt}$$

式中, $d\theta$ 为 dt 时间内圆盘相对地转过的角度, $d\theta_1$ 则为人相对地转过的角度, 对上式积分, 可得

$$\Delta\theta = -\frac{2m'}{m}\Delta\theta_1$$

人沿圆盘走一周时, 应有 $\Delta\theta + (-\Delta\theta) = 2\pi$, 所以, 圆盘相对地转过的角度为

$$\Delta\theta = -\frac{2m'}{m+2m} \times 2\pi$$

例 1-11 如图 1.6 所示, 一轻弹簧与一匀质细杆 $l=1\text{m}$ 相连, 弹簧劲度系数 $k=40\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, 细杆质量 $m=3\text{kg}$, 杆可绕 C (垂直纸面的) 轴无摩擦转动, 且当 $\theta=0$ 时, 弹簧为原长。问: 细杆在 $\theta=0$ 的位置时至少应具有多大的角速度才能使其转到水平位置?

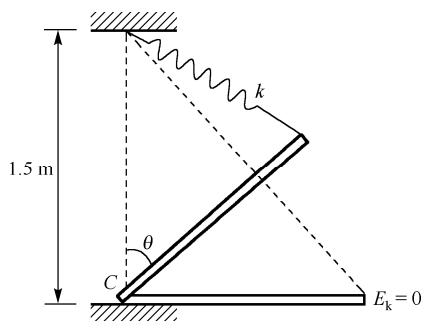


图 1.6 例 1-11 题图

分析: 由题可知杆绕 C 轴无摩擦转动, 所以轴承摩擦力为零, 此时杆在转动过程中只有重力和弹簧弹力做功, 因而杆、地球和弹簧系统机械能守恒。

解: 取弹簧、杆、地为系统。系统在 $\theta=0$ 位置的机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_c$$

系统在 $\theta = 90^\circ$ 位置时的机械能为

$$E' = E_k + E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(\sqrt{1.5^2 + 1^2} - 0.5)^2$$

由机械能守恒 $E' = E$ ，所以有

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_c$$

将 $k = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ， $m = 3 \text{ kg}$ 及 x （弹簧伸长量）、 h_c （质心高度）代入上式，得

$$\omega = 6.18 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. 习题解答

（一）质点运动学

1.1 质点做曲线运动，在时刻 t 质点的位矢为 \mathbf{r} ，速度为 \mathbf{v} ，速率为 v ， t 至 $t + \Delta t$ 时间内的位移为 $\Delta \mathbf{r}$ ，路程为 Δs ，位矢大小的变化量为 Δr （或称 $\Delta|\mathbf{r}|$ ），平均速度为 $\bar{\mathbf{v}}$ ，平均速率为 \bar{v} 。

（1）根据上述情况，则必有（ ）。

- A. $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta s = \Delta r$
- B. $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s \neq \Delta r$ ，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}s \neq \mathrm{d}r$
- C. $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s \neq \Delta r$ ，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}r \neq \mathrm{d}s$
- D. $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s \neq \Delta r$ ，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}r = \mathrm{d}s$

分析与解： $|\Delta \mathbf{r}|$ 为位移的大小， Δs 为路程， Δr 为位矢大小的变化量，这三者是不同的物理量，它们不相等；当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}s \neq \mathrm{d}r$ ，即位移的大小等于路程的大小，但与位矢大小的变化量 Δr 是两个不同的量；本题主要是要理解位移、路程、位矢大小三个不同的物理量，然后做出判断。此题选项 B 为正确答案。

（2）根据上述情况，则必有（ ）。

- A. $|\mathbf{v}| = v$ ， $|\bar{\mathbf{v}}| = \bar{v}$
- B. $|\mathbf{v}| \neq v$ ， $|\bar{\mathbf{v}}| \neq \bar{v}$
- C. $|\mathbf{v}| = v$ ， $|\bar{\mathbf{v}}| \neq \bar{v}$
- D. $|\mathbf{v}| \neq v$ ， $|\bar{\mathbf{v}}| = \bar{v}$

分析与解：本题主要是理解速度 \mathbf{v} 的大小与速率 v 的关系，因为 $|\mathbf{v}| = \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right| = \frac{|\mathrm{d}\mathbf{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$ ，

即 $|\mathbf{v}| = v$ ；平均速度 $\bar{\mathbf{v}}$ 与平均速率 \bar{v} 的概念，因 $|\bar{\mathbf{v}}| = \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right|$ 及 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ，而 $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s$ 故 $|\bar{\mathbf{v}}| \neq \bar{v}$ 。

由此判断，此题选项 C 为正确答案。

1.2 一运动质点在某瞬时位于位矢 $\mathbf{r}(x, y)$ 的端点处，对其速度的大小有 4 种意见，即

$$(1) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}; \quad (2) \frac{\mathrm{d}|\mathbf{r}|}{\mathrm{d}t}; \quad (3) \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}; \quad (4) \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

下述判断正确的是（ ）。

- A. 只有(1)、(2)正确 B. 只有(2)正确
C. 只有(2)、(3)正确 D. 只有(3)、(4)正确

分析与解: 上述(1)、(2)都是指位置矢径大小的变化率,不是速度的大小;(3)是路程对时间的变化率,等于速度的大小;(4)是速度大小用直角坐标的分量表示。所以正确选项为 D。

1.3 质点做曲线运动, \mathbf{r} 表示位置矢量, \mathbf{v} 表示速度, \mathbf{a} 表示加速度, s 表示路程, a_t 表示切向加速度。有下列表达式:

$$(1) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}; \quad (2) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}; \quad (3) \frac{ds}{dt} = \mathbf{v}; \quad (4) \frac{dv}{dt} = a_t$$

下述判断正确的是 ()。

- A. 只有(1)、(4)是对的 B. 只有(2)、(4)是对的
C. 只有(2)是对的 D. 只有(3)是对的

分析与解: 由于 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 为加速度的定义式,故(1)正确; $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ 这个等式不成立,左端为矢径大小的变化率,不等于速度的大小(速率),所以(2)错; $\frac{ds}{dt} = v$ 该式左端为速率,右端为速度,也是不相等的,所以(3)是错的;切向加速度等于速率对时间的变化率,所以式 $a_t = \frac{dv}{dt}$ 正确。故本题正确选项为 A。

1.4 下列表述中正确的是 ()。

- A. 质点做圆周运动时,加速度方向总是指向圆心
B. 质点做抛体运动时,由于加速度恒定,所以加速度的切向分量和法向分量也是恒定的
C. 质点做曲线运动时,加速度方向总是指向曲线凹的一侧
D. 质点做曲线运动时,速度的法向分量总是零,加速度的法向分量也应是零

分析与解: 质点做圆周运动时,若 $a_t \neq 0$,则加速度方向不指向圆心;质点做抛体运动时,如地球表面的平抛或斜抛运动,加速度恒定 $\mathbf{a} = \mathbf{g}$,但质点运动中切向、法向分量随曲线位置不同而发生变化;质点做曲线运动时,虽速度无法向分量,但因速度方向在改变,其法向加速度不为零。而质点做曲线运动时,在切向、法向都有加速度,所以总加速度应指向曲线凹的一侧,故正确选项为 C。

1.5 质点沿半径为 R 的圆周做变速运动,在任一时刻质点加速度大小为(其中 v 表示任一时刻质点的速率) ()。

$$A. \frac{dv}{dt} \quad B. \frac{v^2}{R} \quad C. \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R} \quad D. \left[\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{v^2}{R} \right)^2 \right]^{1/2}$$

分析与解: 质点做圆周运动,其切向加速度为 $a_t = \frac{dv}{dt}$,法向加速度为 $a_n = \frac{v^2}{R}$,总加速度大小为 $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ (直角坐标的分量表达式)。所以, D 为正确选项。

1.6 假设卫星环绕地球中心做圆周运动,则在运动过程中,卫星对地球中心的 ()。

- A. 角动量守恒,动能也守恒 B. 角动量守恒,动能不守恒

- C. 角动量不守恒, 动能守恒 D. 角动量不守恒, 动量也不守恒
E. 角动量守恒, 动量也守恒

分析与解: 卫星绕地球中心做圆周运动过程所受力为万有引力, 该力对地球中心为有心力, 故角动量守恒; 因其角动量不变, 半径也不变, 故速率不变, 其动能也守恒; 但速度方向在变, 其动量不守恒。故正确选项为 A。

1.7 一圆盘正绕垂直于盘面的水平光滑固定轴 O 转动。如图 1.7 所示, 射来两个质量相同、速度大小相同而方向相反, 并在同一条直线上的子弹。子弹射入并且停留在圆盘内, 则子弹射入的瞬间, 圆盘的角速度 ω ()。

- A. 增大 B. 不变 C. 减小 D. 不能确定

分析与解: 因两子弹作用在圆盘上, 两子弹对固定转轴的角动量的大小相等, 方向相反, 总角动量为零, 系统角动量守恒, 但圆盘因子弹射入而转动惯量增大, 故角速度减小, 所以正确选项为 C。

1.8 一质点的运动方程为 $x = 3t + 5$, $y = 0.5t^2 + 3t - 4$ (x 、 y 的单位为 m , t 的单位为 s)。以 t 为变量, 写出位置矢量的表达式_____; 它的轨迹方程为_____; 质点在 $t = 4 \text{ s}$ 时的速度为_____; 加速度为_____。

分析与解: 在直角坐标系下位置矢量的表示形式为 $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, 所以将 x 、 y 代入得位置矢量的表达式为 $\mathbf{r} = (3t + 5)\mathbf{i} + (0.5t^2 + 3t - 4)\mathbf{j}$; 质点运动的参数方程为

$$x = 3t + 5, y = 0.5t^2 + 3t - 4, \text{ 消去这组方程中的时间参数 } t, \text{ 便得到轨迹方程 } y = \frac{x^2}{18} + \frac{4}{9}x - \frac{137}{18};$$

质点运动的速度和加速度为 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$, 故 $\mathbf{v}_{t=4} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ 。加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \mathbf{a}_{t=4} = 1\mathbf{j}。$$

1.9 一质点沿半径为 1 m 的圆周做圆周运动, 它通过的弧长 S 的变化规律为 $S = t + 2t^2$ (t 单位为 s), 问它在 2 s 末的速率为_____; 切向加速度为_____; 法向加速度为_____。

分析与解: 在自然坐标系下, 运动方程为 $S = t + 2t^2$, 则速率 $v = \frac{ds}{dt} = 1 + 4t$, 将 $t = 2 \text{ s}$ 代入得 2 s 末的速率 $v = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 切向加速度、法向加速度分别为 $a_t = \frac{dv}{dt} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 、

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}。$$

1.10 质量为 m 的质点在流体中做直线运动, 受与速度成正比的阻力 kv (k 为常数) 作用。 $t = 0$ 时质点的速度为 v_0 , 则 t 时刻的速度为_____; 0 到 t 时间内经过的距离为_____; 停止运动前经过的距离为_____。

分析与解: 因质点所受阻力 $f = -kv$, 负号表示阻力的方向与速度的方向相反, 且在一直线上运动, 所以有 $f = -kv = ma = m \frac{dv}{dt}$, 亦 $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v$ 。分离变量再从 0 到 t 时间内积

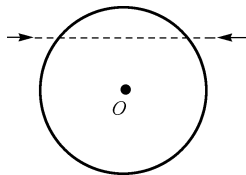


图 1.7 习题 1.7 图

分, 即 $\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{k}{m} dt$, 得 t 时刻的速度 $v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$; 又由 $v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$, 再分离变量积分, 即 $\int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt$, 得 0 到 t 时间内质点经过的距离 $x = \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$; 当速率 $v = 0$ 时, 物体停止运动, 亦即 $t \rightarrow \infty$, $v = 0$, 代入得物体停止运动前经过的距离 $x = \frac{mv_0}{k}$ 。

1.11 在质点运动中, 已知 $x = ae^{-kt}$, $\frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}$, $y|_{t=0} = b$ 。则质点的加速度为_____; 它的轨道方程为_____。

分析与解: 因为 $x = ae^{-kt}$, 即有 $v_x = \frac{dx}{dt} = -ake^{-kt}$, 而 $v_y = \frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}$, 故质点沿 x 轴、 y 轴方向的加速度分别为 $a_x = \frac{dv_x}{dt} = ak^2e^{-kt}$ 、 $a_y = \frac{dv_y}{dt} = bk^2e^{-kt}$, 所以质点的加速度为 $a = ak^2e^{-kt}\mathbf{i} + bk^2e^{-kt}\mathbf{j}$; 又由 $\frac{dy}{dt} = -bke^{-kt}$, 考虑 $y|_{t=0} = b$, 计算积分 $\int_b^y dy = \int_0^t -bke^{-kt} dt$, 得 $y = be^{-kt}$ 。再由参数方程 $x(t)$ 、 $y(t)$ 消去时间因子 t , 得到轨迹方程为 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ 。

1.12 已知质点沿 x 轴做直线运动, 其运动方程为 $x = 2 + 6t^2 - 2t^3$, 式中 x 的单位为 m , t 的单位为 s 。求:

- (1) 质点在运动开始后 $4.0 s$ 内的位移的大小。
- (2) 质点在该时间内所通过的路程。
- (3) $t = 4 s$ 时质点的速度和加速度。

分析: 已知质点做直线运动及其运动方程, 可直接应用位移、路程、速度、加速度概念求解。

解: (1) 因质点做一维运动, 位移等于质点在 $t = 4 s$ 和 $t = 0 s$ 两时刻位置坐标之差, 即

$$\Delta x = x_{t=4} - x_{t=0} = -32 \text{ m}$$

(2) 质点在 $t = 4 s$ 和 $t = 0 s$ 时间内的路程要考虑质点在这个时间内有无反向运动, 因为 $v_x = \frac{dx}{dt} = 12t - 6t^2$; 当 $v_x = 0$ 时得 $t = 2 s$, 即质点反向运动。故质点全程所走的路程应为 $t = 0 s$ 到 $t = 2 s$ 和 $t = 2 s$ 到 $t = 4 s$ 走过的路程之和, 即

$$\Delta s = |x_{t=2} - x_{t=0}| + |x_{t=4} - x_{t=2}| = 8 + 40 = 48 \text{ m}$$

(3) 由速度、加速度的定义, 有

$$v_{t=4} = \frac{dx}{dt} = 12t - 6t^2 = -48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 12 - 12t = -36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

1.13 一飞行火箭的运动方程为: $x = ut + u\left(\frac{1}{b} - t\right)\ln(1 - bt)$, 其中 b 是与燃料燃烧速率有关的量, u 为燃气相对火箭的喷射速度。求: (1) 火箭飞行速度与时间的关系; (2) 火箭的加速度。

分析: 虽然这是一个变质量问题, 但在此题中未涉及运动方程的建立。故根据运动方程直接对时间求一阶导、二阶导可得火箭的速度、加速度与时间的关系。

解: (1) 火箭飞行速度与时间的关系, 由速度的定义有

$$v_x = \frac{dx}{dt} = u + \frac{u}{b} \frac{(-b)}{1-bt} - u \ln(1-bt) - ut \frac{(-b)}{1-bt} = -u \ln(1-bt)$$

(2) 火箭的加速度与时间的关系

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{bu}{1-bt}$$

1.14 已知质点的运动方程为 $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (2 - t^2)\mathbf{j}$, \mathbf{r} 的单位为 m , t 的单位为 s , 求:

(1) 质点的运动轨迹。

(2) $t = 0$ 及 $t = 2\text{s}$ 时, 质点的位矢。

(3) 由 $t = 0$ 到 $t = 2\text{s}$ 内质点的位移 $\Delta\mathbf{r}$ 和径向增量 Δr 。

分析: 已知质点做平面运动, 题设给出了位矢方程, 实际上也就给出了运动方程 x 和 y 的两个分量式, 由分量式消去参数 t , 便可得到质点的轨迹方程。由位矢方程可直接求得质点在任意时刻的位矢, 并求任意两时刻位置的位矢差即得位移 $\Delta\mathbf{r}$ 。求任意两时刻位置的位矢大小之差, 即得径向增量 Δr 。

解: (1) 由运动方程 $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (2 - t^2)\mathbf{j}$ 得 x 和 y 的两个分量式, 即

$$x = 2t, \quad y = 2 - t^2$$

消去参数 t 得运动轨迹

$$y = 2 - \frac{1}{4}x^2$$

(2) 由位矢方程 $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (2 - t^2)\mathbf{j}$, 将时间 $t = 0$ 及 $t = 2\text{s}$ 代入得质点的位矢

$$\mathbf{r}_{t=0} = 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_{t=2} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

(3) $t = 0$ 到 $t = 2\text{s}$ 内质点的位移、径向增量为

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_{t=2} - \mathbf{r}_{t=0} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

$$\Delta r = |\mathbf{r}_{t=2}| - |\mathbf{r}_{t=0}| = \sqrt{20} - 2 = 2.47\text{ m}$$

1.15 质点沿直线运动, 加速度 $a = 4 - t^2$, 式中 a 的单位为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, t 的单位为 s 。如当 $t = 3\text{s}$ 时, 质点位于 $x = 9\text{m}$ 处, 速度大小为 $v = 2\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 求质点的运动方程。

分析: 已知质点做直线运动的加速度表达式 $a(t)$, 对其积分一次便可得到速度表达式 $v(t)$, 再积分又可得到质点的运动方程 $x(t)$ 。

解: 由加速度表达式 $a(t)$ 积分, 可得速度表达式

$$v = \int a(t) dt = \int (4 - t^2) dt = 4t - \frac{1}{3}t^3 + v_0$$

再次积分得

$$x = \int v dt = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 + v_0 t + x_0$$

将题设给出的初始条件代入以上两式, 可确定两个积分常数, $v_0 = -1 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1})$, $x_0 = 0.75 \text{ (m)}$, 则质点的运动方程为

$$x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + 0.75$$

1.16 一质点 P 沿半径 $R = 3.0 \text{ m}$ 的圆周做匀速率运动, 运动一周所需时间为 20.0 s , 设 $t = 0$ 时, 质点位于 O 点。按图 1.8(a) 中所示 Oxy 坐标系, 求 (1) 质点 P 在任意时刻的位矢; (2) 5 s 时的速度和加速度。

分析: 按题意质点做匀速率圆周运动。假设质点做圆周运动的角速度为 ω , 则可写出在 Oxy 坐标系下沿 x 轴和 y 轴运动的分量式, 继而可求出质点在任意时刻的位矢 \mathbf{r} 、速度 \mathbf{v} 和加速度 \mathbf{a} 。

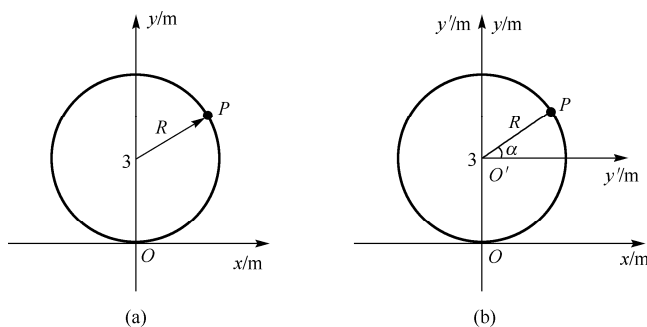


图 1.8 习题 1.16 图

解: (1) 设质点做圆周运动的角速度为 ω , 在经过 t 后, 质点转过角度为 ωt , 所以质点 P 在 Oxy 坐标系下的位置为

$$x = R \sin \omega t, \quad y = R - R \cos \omega t$$

从题设知质点做圆周运动的角速度为 $\omega = \frac{2\pi}{20} = 0.1\pi$, 所以质点的位矢为

$$\mathbf{r} = 3(\sin 0.1\pi t)\mathbf{i} + 3(1 - \cos 0.1\pi t)\mathbf{j}$$

(2) 质点的速度、加速度为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0.3\pi \cos 0.1\pi t \mathbf{i} + 0.3\pi \sin 0.1\pi t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -0.03\pi^2 \sin 0.1\pi t \mathbf{i} + 0.03\pi^2 \cos 0.1\pi t \mathbf{j}$$

将时间 $t = 5 \text{ s}$ 代入, 得

$$\boldsymbol{v}_{t=5} = \left. \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right|_{t=5} = 0.3\pi \boldsymbol{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{a}_{t=5} = \left. \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \right|_{t=5} = -0.03\pi^2 \boldsymbol{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

1.17 跳水运动员自 10 m 跳台自由下落, 入水后因受水的阻碍而减速, 设加速度 $a = -kv^2$, $k = 0.4 \text{ m}^{-1}$ 。求运动员速度减为入水速度的 10% 时的入水深度。

分析: 本题可先求出运动员入水时的速度, 由于运动员受水阻力, 将做减速运动, 因而可用加速度与速度之间的关系求解, 然后再由速度与位移关系求出入水深度。但此题也可直接从已知的加速度公式 $a = \frac{dv}{dt}$, 两边同乘以位移 dx , 得 $a dx = \frac{dv}{dt} dx = v dv$, 再由初始条件进行积分, 得到入水深度。这里应用第二种方法求解。

解: 设水面为坐标原点, 向下为 x 轴。已知运动员入水后的加速度 $a = -kv^2$, 由加速度关系

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = -kv^2$$

对上式后一等式分离变量, 整理后有

$$-\frac{dv}{kv} = dx$$

应用初始条件进行积分, 即

$$\int_{v_0}^v \frac{1}{-kv} dv = \int_0^x dx$$

其中 $v = v_0 / 10$, 所以 $x = -\frac{1}{k} \ln v \Big|_{v_0}^{v_0/10}$, 将 $k = 0.4 \text{ m}^{-1}$, $\ln 10 = 2.303$ 代入, 得

$$x = \frac{1}{k} \ln 10 = 5.756 \text{ m}$$

1.18 一石子从空中由静止下落, 由于空气阻力, 石子并非做自由落体运动, 现测得其加速度 $a = A - Bv$, 式中 A 、 B 为正恒量, 求石子下落的速度和运动方程。

分析: 这是质点运动学的第二类问题, 已知质点运动加速度, 求运动方程。因此, 解决问题的关键是依据题设条件确定速度随时间变化的函数关系式, 而后积分求解。

解: 设 $t = 0$ 时, 石子位置为坐标原点 ($y = 0$), 向下 y 轴为正。由题设知加速度和速度的关系为

$$a = A - Bv$$

而加速度 $a = \frac{dv}{dt}$, 变形并将上式代入, 得

$$dv = (A - Bv)dt$$

分离变量得 $\frac{dv}{(A - Bv)} = dt$ ，并两边积分，有

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{(A - Bv)} = \int_0^t dt$$

解得

$$v = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$$

又因为 $v = \frac{dy}{dt}$ ，所以考虑初始条件并将 v 代入积分

$$\int_0^y dy = \int_0^t \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})dt$$

故得石子下落的运动方程为

$$y = \frac{A}{B}t + \frac{A}{B^2}(e^{-Bt} - 1)$$

1.19 飞机以 $v_0 = 100 \text{ m/s}$ 的速度沿水平直线飞行，在离地面高 $h = 98 \text{ m}$ 时，驾驶员要把物品投到前方某一地面目标上，问：投放物品时，目标距飞机下方地点多远？驾驶员看目标的视线和竖直线应成什么角度？

分析：飞机沿水平直线飞行，投掷物体相当于物体做平抛运动，因此由运动分量方程可计算在一定高度 y 的物体，从抛出到地面目标所花的时间 t 和水平距离 x ，以及飞行员看目标视线与竖直方向的夹角 θ 。

解：投掷的物品应做平抛运动，其运动学方程为

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}gt^2$$

将 $y = h = 98 \text{ m}$ ， $v_0 = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 代入可解出此时目标距飞机下方地点的距离

$$x \approx 447 \text{ m}$$

驾驶员看目标视线与竖直线角度为

$$\theta = \arctan \frac{x}{h} = 77.6^\circ$$

1.20 一直立的雨伞，张开后其边缘圆周的半径为 R ，离地面的高度为 h ，(1) 当伞绕伞柄以匀角速 ω 旋转时，求证水滴沿边缘飞出后落在地面上半径为 $r = R\sqrt{1 + 2h\omega^2/g}$ 的圆周上；(2) 读者能否由此定性构想一种草坪上或农田灌溉用的旋转式洒水器的方案？[提示：见图 1.9(b)。]

分析：当伞柄中心以 ω 旋转时，伞边缘的雨滴将沿圆周的切向飞出，做平抛运动。由叠加原理可求得水滴自飞出点到落地点的水平距离。伞柄中心到水滴的水平距离可由几何关系计算。

证明: (1) 如图 1.9(a) 所示坐标系, 雨滴沿边缘飞出后, 做平抛运动, 其运动的分量方程为

$$x = v_0 t = \omega R t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2 = h$$

雨滴从抛出点到掉落地面所花时间为

$$t = \sqrt{2h/g}$$

设雨滴落地点距伞中心的水平距离为 r , 注意角量与线量关系 ($v_0 = \omega R$), 则由图 1.9(a) 可知

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} = R\sqrt{1 + 2h\omega^2/g}$$

因 r 不随雨滴位置改变, 所以雨滴落地应为以 r 为半径的圆周, 证毕。

(2) 洒水器的洒水范围可通过调节洒水器的转速来实现。

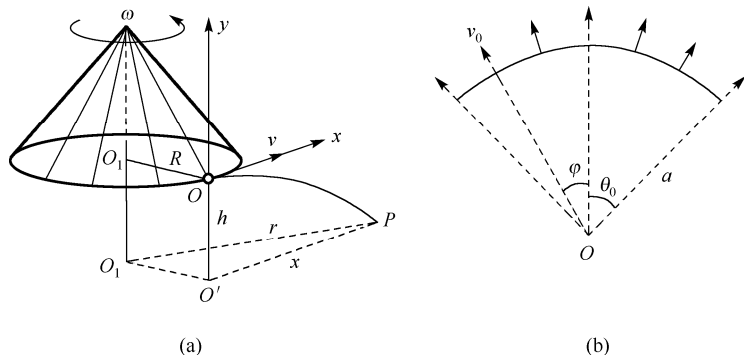


图 1.9 习题 1.20 图

1.21 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2$ 运动, v_0 、 b 都是常量。求: (1) t 时刻质点的总加速度; (2) t 为何值时总加速度在数值上等于 b ? (3) 当加速度达到 b 时, 质点已沿圆周运行了多少圈?

分析: 质点做圆周运动时, 其在任意时刻的切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n 可由运动方程求出, 从而可得到总加速度; 令总加速度等于 b , 可解出 t 值; 再由 t 值求出这段时间内质点走过的总路程, 总路程除以一周的路程及为质点转的圈数。

解: (1) 由质点的运动方程, $s = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2$, 可得质点的切向和法向加速度, 即

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -b, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

所以总加速度为

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{\sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4}}{R}$$

(2) 令 $a=b$, 则有

$$t = \frac{v_0}{b}$$

(3) 将 $t = \frac{v_0}{b}$ 代入运动方程, 即有

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2$$

$$s_{t=\frac{v_0}{b}} = \left(v_0 t - \frac{1}{2} b t^2 \right)_{t=\frac{v_0}{b}} = \frac{v_0^2}{2b}$$

所以, 加速度达到 b 时, 质点圆周运动转的圈数为

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi b R}$$

1.22 一质点在半径为 0.10 m 的圆周上运动, 其角位置为 $\theta = 2 + 4t^2$, 式中 θ 的单位为 rad , t 的单位为 s 。(1) 求在 $t = 2.0 \text{ s}$ 时质点的法向加速度和切向加速度; (2) 当切向加速度的大小恰好等于总加速度大小的一半时, θ 值为多少? (3) t 为多少时, 法向加速度和切向加速度的值相等?

分析: 本题是用角量描述质点的运动, 且已知质点运动方程, 可先求出质点的角速度, 继而求质点的切向加速度 a_t 、法向加速度 a_n 及总加速度 a ; 然后考虑 $a_t = a/2$ 时, 求出时间, 再用运动方程求出角度 θ ; 考虑 $a_t = a_n$ 时, 解出时间。

解: (1) 由运动方程对时间求一阶导、二阶导, 分别得质点的角速度和角加速度为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 8t, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 8$$

所以质点的切向加速度 a_t 、法向加速度 a_n 及总加速度 a 为

$$a_t = \alpha R = 0.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = \frac{(\alpha\omega)^2}{R} = \omega^2 R = 25.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

(2) 当 $a_t = a/2$ 时, $a_t = a/2 = \frac{1}{2}\sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, 即 $3a_t^2 = a_n^2 = (\omega^2 R)^2$, 将 $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 8t$ 代入, 解得

$$t^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

所以, 质点转动的角度为

$$\theta = 2 + 4t^2 = 2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{8} = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ rad}$$

(3) 令 $a_t = a_n$ ，即有 $a_t = a_n = (\omega^2 R)$ ，解得

$$t = 0.35 \text{ s}$$

1.23 一无风的下雨天，一列火车以 $v_1 = 20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度匀速前进，在车内的旅客看见玻璃窗外的雨滴和垂线成 75° 角下降，求雨滴下落的速度 v_2 。（设下降的雨滴做匀速运动。提示：见图 1.10。）

分析：这是一个相对运动问题。可按题意画出火车速度 v_1 ，车内乘客所见雨滴速度 v_2' 的矢量图，从矢量图可直接求得雨滴下降速度 v_2 。

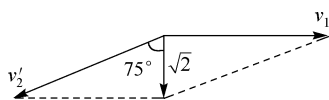


图 1.10 题 1.23 图

解：雨滴下落速度为雨对地的速度，根据相对运动速度公式，有

$$v_{\text{雨地}} = v_{\text{雨车}} + v_{\text{车地}} \quad \text{或} \quad v_2 = v_2' + v_1$$

由矢量三角形，解得

$$v_2 = v_1 \tan 15^\circ = 5.36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

1.24 一汽车在雨中沿直线行驶，其速率为 v_1 ，遇一下落速度方向偏于竖直方向之前 θ 角，速率为 v_2 的雨滴，若车后有一长方形物体，如图 1.11(a)所示。问车速 v_1 为多大时，此物体正好不会被雨水淋湿？[提示：见图 1.11(b).]

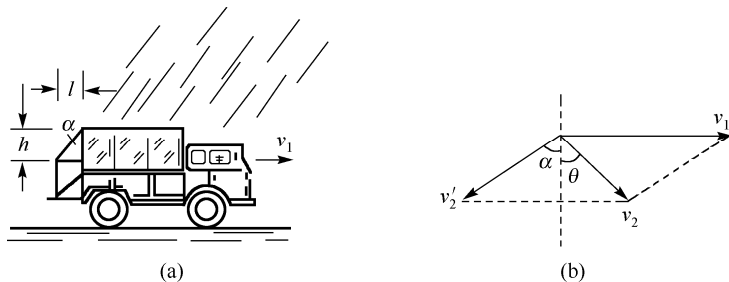


图 1.11 习题 1.24 图

分析：这是一个相对运动问题。为使木板不至于淋雨，则雨滴对汽车的速度 v_2' 与竖直方向的夹角必须满足 $\tan \alpha \geq \frac{l}{h}$ （设车后长方形物体的长度为 l ，车上挡板高度为 h ），按题意画出相应矢量图，然后通过几何关系可求解汽车速度 v_1 。

解：设车后长方形物体的长度为 l ，车上挡板高度为 h 。汽车速度为 v_1 ，雨滴相对地的速度 v_2 ，要物体不被雨水打湿，则雨滴相对汽车速度与竖直反向夹角应为

$$\tan \alpha \geq \frac{l}{h}$$

根据相对运动的速度关系，有

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2'$$

该关系在直角坐标轴上的分量为

$$v_1 = v_2 \sin \theta + v_2' \sin \alpha$$

并将 $v_2' = v_2 \cos \theta / \cos \alpha$ 代入上式得

$$v_1 = v_2 \sin \theta + v_2 \cos \theta \tan \alpha$$

因为 $\tan \alpha \geq \frac{l}{h}$, 所以车速 v_1 为

$$v_1 \geq v_2 \left(\sin \theta + \frac{l}{h} \cos \theta \right)$$

时, 物体正好不会被雨水淋湿。

(二) 质点动力学

1.25 倾角为 30° 的一个斜面体放置在水平桌面上, 一个质量为 2 kg 的物体沿斜面下滑, 下滑的加速度为 $3.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。若此时斜面体静止在桌面上不动, 则斜面体与桌面间的静摩擦力 $f =$ _____。

分析与解: 此题可通过受力分析来计算, 但计算过程稍复杂。也可以以斜面体 M 静止, 则斜面体所受的静摩擦力和物体对斜面水平方向的作用力为一对平衡力。而斜面体对物体在水平方向上的作用力为物体所受合力 ($f_{\text{合力}} = ma$) 在水平方向的投影, 即根据牛二定律, 可得 $f = ma \cos 30^\circ \approx 5.2 \text{ N}$ 。

1.26 如题图 1.12 所示, 一小珠可以在半径为 R 的竖直圆环上做无摩擦滑动。今使圆环以角速度 ω 绕圆环竖直直径转动。要使小珠离开环的底部而停在环上某一点, 则角速度 ω 最小应大于 _____。

分析与解: 小球停在环上某一点随圆环一起做角速度为 ω 的圆周运动, 其法向力为

$$f_{\text{向心}} = mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = m\omega^2 r = m\omega^2 R \sin \theta$$

由此可得

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R \cos \theta}}$$

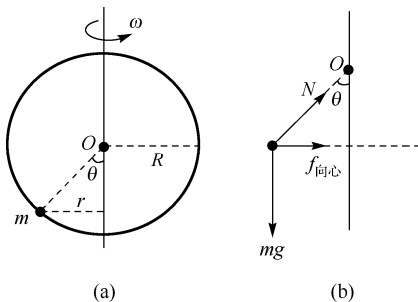


图 1.12 习题 1.26 图

因 $\cos \theta$ 最大值为 1, 所以角速度 ω 为

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$$

1.27 假设作用在一质量为 10 kg 的物体上的力, 在 4 s 内均匀地从 0 增加到 50 N, 使物体沿力的方向由静止开始做直线运动, 则物体最后的速率 $v =$ _____。

分析与解: 按题意, 力随时间的变化式可写为 $F = \frac{50}{4}t$, 由于力的时间累积作用, 物体的动量将发生变化, 所以可应用动量定理求解。根据动量定理, 有 $\int_0^4 F dt = mv - 0$, 将力代入积分, 故得物体最后速率 $v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

1.28 一质量为 M 的质点沿 x 轴正向运动, 假设该质点通过坐标为 x 的位置时速度的大小为 kx (k 为正值常量), 则此时作用于该质点上的力 $F =$ _____, 该质点从 x_0 点出发运动到 x_1 处所经历的时间 $\Delta t =$ _____。

分析与解: 由题意可知, 通过坐标为 x 位置质点的速度 $v = kx$, 则质点的加速度为 $a = \frac{dv}{dt} = k \frac{dx}{dt} = kv = k^2 x$, 故此时作用于该质点的力 $F = Mk^2 x$; 又由速度 $v = kx$ 得 $v = \frac{dx}{dt} = kx$, 对此分离变量再积分, 即 $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^t k dt$, 积分后有 $\ln \frac{x_1}{x_0} = k \Delta t$, 解得 $\Delta t = \frac{1}{k} \ln \frac{x_1}{x_0}$ 。

1.29 设作用在质量为 1 kg 的物体上的力 $F = 6t + 3$ (SI), 如果物体在这一力的作用下, 由静止开始沿直线运动, 在 2.0 s 内, 这个力作用在物体上的冲量大小 $I =$ _____。

分析与解: 该题直接用冲量定义式计算。由 $I = \int_{t_0}^{t_1} F dt$, 可得在 2.0 s 内的冲量, 即 $I = \int_{t_0}^{t_1} F dt = \int_0^2 (6t + 3) dt = 18 \text{ N} \cdot \text{s}$ 。

1.30 一质量为 m 的物体, 以初速 v_0 从地面抛出, 抛射角 $\theta = 30^\circ$, 如忽略空气阻力, 则从抛出到刚要接触地面的过程中物体动量增量的大小为 _____, 物体动量增量的方向为 _____。

分析与解: 物体从地面抛出, 在落地时速度大小不变, 方向与地面夹角依然为 30° 。由于在水平方向无力作用, 因此在该方向上动量不变。在竖直方向上物体受到重力作用, 动量将改变, 为 $\Delta mv = mv_0 \sin 30^\circ - (mv_0 \sin 30^\circ) = 2mv_0 \sin 30^\circ = mv_0$ 。

1.31 一个人站在平板车上掷铅球, 人和车总质量为 M , 铅球的质量为 m , 平板车可沿水平、光滑的直轨道移动。设铅直平面为 xy 平面, x 轴与轨道平行, y 轴正方向竖直向上。已知未掷球时, 人、车、球皆静止。球出手时沿斜上方, 它相对于车的初速度在 xy 平面内, 其大小为 v_0 , 方向与 x 轴正向的夹角为 θ , 人在掷球过程中对车无滑动, 则球被抛出之后, 车对地的速度 V 为 _____, 球对地的速度 V 为 _____。

分析与解: 以人车为研究系统, 并建立平面直角坐标系, 水平方向为 x 轴。在 x 轴方向外力为零, 因而在 x 轴方向上动量守恒 (但注意用动量守恒时, 应采用同一参考系)。

由于 v_0 为球对车速度, 将其转换为对地参考系速度 v_1 , 由速度变换, 即

$$v_{1x} = v_0 \cos \theta + V$$

$$v_{1y} = v_0 \sin \theta$$

在水平方向动量守恒, 故有

$$mv_{1x} + MV = 0$$

将速度 v_{1x} 代入, 可求得车对地的速度为

$$V = -\frac{mv_0 \cos \theta}{M + m} \mathbf{i}$$

球对地速度分为 x 方向分量和 y 方向分量, 即 $\mathbf{v} = v_{1x} \mathbf{i} + v_{1y} \mathbf{j}$, 所以

$$\mathbf{v} = v_{1x} \mathbf{i} + v_{1y} \mathbf{j} = v_0 \cos \theta \left(1 - \frac{m}{M + m} \right) \mathbf{i} + v_0 \sin \theta \mathbf{j}$$

1.32 质量为 $M = 1.5 \text{ kg}$ 的物体, 用一根长为 $l = 1.25 \text{ m}$ 的细绳悬挂在天花板上, 今有一质量为 $m = 10 \text{ g}$ 的子弹以 $v_0 = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的水平速度射穿物体, 刚穿出物体时子弹的速度大小 $v = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 如图 1.13 所示。设穿透时间极短, 求: (1) 子弹刚穿出时绳中张力的
大小; (2) 子弹在穿透过程中所受的冲量。(设重力加速度值为 $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。)

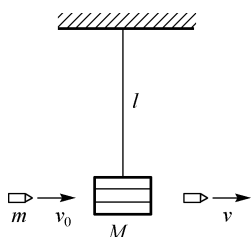


图 1.13 习题 1.32 图

分析: 子弹在水平方向射入物体, 考虑子弹与物体之间相互作用的内力远大于外力, 故物体、子弹在水平方向动量守恒, 由于子弹与物体相互作用, 所以在子弹射出时物体获得一定速度, 且以绳长为半径做圆周运动, 因而有一定的加速度; 子弹在穿透过程中所受的冲量可由动量定理求解。

解: (1) 在子弹与物体碰撞过程中, 内力远大于外力。设子弹刚穿出时物体速度为 V , 故子弹、物体在水平方向动量守恒, 即

$$mv_0 = MV + mv$$

由此可得

$$V = \frac{m}{M}(v_0 - v)$$

子弹刚穿出物体时, 物体做圆周运动, 其做圆周运动的向心力为

$$T - Mg = M \frac{V^2}{l}$$

所以, 子弹刚穿出时绳中张力的大小为

$$T = M \frac{V^2}{l} + Mg = M \left(\frac{V^2}{l} + g \right) = 26.5 \text{ N}$$

(2) 子弹在穿透过程中所受的冲量可由动量定理 $I = \Delta p = mv - mv_0$ 求解, 所以

$$I = mv - mv_0 = -4.7 \text{ N} \cdot \text{s}$$

方向与 v_0 反向。

1.33 质量为 m 的一人, 站在质量为 M 的一条静止在湖面的船上, 船头垂直指向岸边, 人与岸边的距离为 s_0 。人向着湖岸在船上走过 l 的距离停下来, 求这时人离湖岸的距离 s (忽略船与水的摩擦阻力)。

分析: 在忽略船水摩擦力的情况下, 人、船构成的系统在水平方向不受外力作用, 故系统在此方向上动量守恒。再考虑人、船的相对运动即可求解。

解: 设人对船速度为 v_1 , 船对地速度为 v_2 , 人对地速度为 v_3 , 则由相对运动公式有

$$v_3 = v_1 - v_2$$

又由于水平方向动量守恒, 即

$$0 = mv_3 - Mv_2 = m(v_1 - v_2) - Mv_2$$

由此可得

$$v_2 = \frac{m}{(M+m)}v_1$$

而人相对船走过的距离 l 和船相对地走过的距离 l' , 分别为

$$l = \int_0^t v_1 dt = v_1 t, \quad l' = \int_0^t v_2 dt = v_2 t$$

故, 可得

$$l' = \frac{m}{m+M}l$$

这时人离湖岸的距离为

$$s = s_0 - (l - l') = s_0 - \frac{M}{m+M}l$$

1.34 如图 1.14(a)所示, 用传送带 A 输送煤粉, 料斗口在 A 上方高 $h = 0.5 \text{ m}$ 处, 煤粉自料斗口自由落在 A 上。设料斗口连续卸煤的流量为 $q_m = 40 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, A 以 $v = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的水平速度匀速向右移动。求装煤的过程中, 煤粉对 A 的作用力的大小和方向。(不计相对传送带静止的煤粉重量)

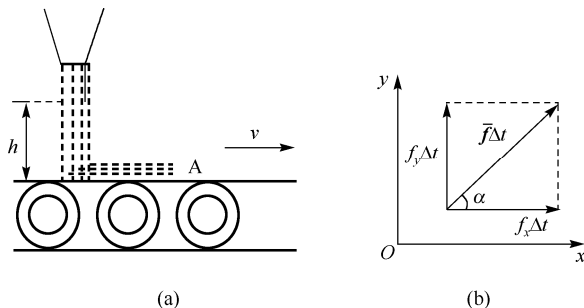


图 1.14 习题 1.34 图

分析: 煤粉从料斗口落在传送带上, 将受到传送带的作用, 使其动量由竖直方向变为水平方向, 故在本题中可应用动量定理求解。

解: 煤粉自料斗口下落, 接触传送带前运动过程为自由落体, 所以竖直向下的速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

设煤粉与 A 相互作用的 Δt 时间内, 落于传送带上的煤粉质量为 $\Delta m = q_m \Delta t$, A 对煤粉的平均作用力为 \bar{f} , 则在碰撞过程中满足动量定理, 即

$$\int_0^t \bar{f} dt = \Delta m v - \Delta m v_0 = \bar{f} \Delta t$$

由动量定理的分量式

$$f_x \Delta t = \Delta m v - 0$$

$$f_y \Delta t = 0 - (-\Delta m v)$$

将 $\Delta m = q_m \Delta t$ 代入得

$$f_x = q_m v$$

$$f_y = q_m v_0$$

故 A 对煤粉的平均作用力大小 $|\bar{f}|$ 为

$$|\bar{f}| = (f_x^2 + f_y^2)^{1/2} = 149 \text{ N}$$

与 x 轴正向夹角为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = 57.4^\circ$$

由牛顿第三定律, 煤粉对 A 的作用力 $f' = f = 149 \text{ N}$, 方向与图 1.14(b) 中 \bar{f} 相反。

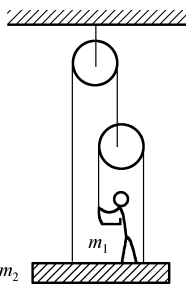


图 1.15 习题 1.35 图

1.35 如图 1.15 所示, 一质量为 $m_1 = 60 \text{ kg}$ 的人, 站在质量为 $m_2 = 30 \text{ kg}$ 的底板上, 用绳和滑轮连接。设滑轮、绳的质量及轴处的摩擦可以忽略不计, 绳子不可伸长。欲使人和底板能以 $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 的加速度上升, 试求 (1) 人对绳子的拉力 T_2 多大? (2) 人对底板的压力多大? (取 $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。)

分析: 因为滑轮、绳的质量及轴处的摩擦可以忽略不计, 所以人和底板的质量为系统的质量, 把人、板、两滑轮作为一个系统。由受力分析可知, 连接顶板上绳子所受力 $T_1 = 4T_2$, 然后由牛顿第二定律列出运动方程求解。

解: (1) 当把人、板、两滑轮作为一个系统, 则系统受有外力为 T_1 、 $m_1 g$ 、 $m_2 g$ 。由牛顿第二定律可得

$$T_1 - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

式中 $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 为人和底板的加速度, 将各已知量代入, 得

$$T_1 = 990 \text{ N}$$

又由受力分析可知各绳之间力的关系, 可得 $T_1 = 4T_2$, 所以解得

$$T_2 = 247.5 \text{ N}$$

(2) 设底板对人的压力为 N' ，对底板受力分析，有运动方程为

$$2T_2 + T_2 + N' - m_1 g = m_2 a$$

代入各已知量，解得

$$N' = 382.5 \text{ N}$$

1.36 试求赤道正上方的地球同步卫星距地面的高度。

分析：赤道正上方的地球同步卫星其绕地的角速度应与地球的自转速度相同。设地球角速度为 ω ，则卫星做圆周运动，其向心力为万有引力。

解：设地球自转角速度为 ω ，卫星距地高度为 h ，地球半径为 R ，地球、卫星质量分别为 M 、 m ，则卫星所受万有引力为

$$m\omega^2(R+h) = k \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

对地面物体有

$$mg = k \frac{Mm}{R^2} \quad \text{或} \quad kM = gR^2$$

将地球半径 $R = 6371 \times 10^3 \text{ m}$ ，地球自转角速度为 $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$ 代入，得卫星距地高度

$$h = 3.58 \times 10^4 \text{ km}$$

1.37 如图 1.16 所示，质量为 M 的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动。一质量为 m 的小球水平向右飞行，以速度 v_1 （对地）与滑块斜面相碰，碰后竖直向上弹起，速率为 v_2 （对地）。若碰撞时间为 Δt ，试计算：（1）此过程中滑块对地的平均作用力；（2）滑块速度增量的大小。

分析：把滑块 M 和小球 m 作为一个系统，碰撞前系统只有水平方向动量，碰撞后， m 具有竖直方向动量，故系统增加的竖直动量是受到地对滑块力的作用，包括重力和冲力。因而可在竖直方向和水平方向应用动量定理求解。

解：（1）设滑块对地的平均作用力为 \bar{F} ，则有

$$\bar{F} = \bar{f} + Mg$$

式中 \bar{f} 为小球对滑块的平均冲力， $\bar{f}\Delta t = mv_2$ ，代入上式，则有

$$\bar{F} = \frac{mv_2}{\Delta t} + Mg$$

方向竖直向下。

（2）滑块速度增量在水平方向上，它是受到小球 m 对其水平方向冲力的作用，它与滑块 M 对小球 m 水平方向冲力为作用力和反作用力关系。小球 m 水平方向冲力引起的动量变化为 $-mv_1$ ，则 M 的动量变化为 mv_1 ，即滑块、小球在水平方向动量守恒

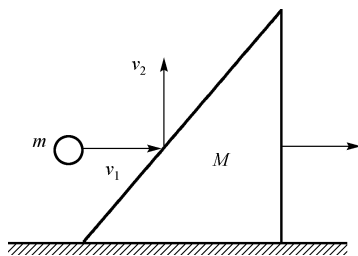


图 1.16 习题 1.37 图

$$0 - mv_1 = MV - 0$$

亦即滑块速度增量的大小为 $\Delta(V - 0) = \left| -\frac{mv_1}{M} \right|$ 。

1.38 一质量为 m 的质点在 $x-y$ 平面上运动, 其位矢为 $\mathbf{r} = a\cos\omega t\mathbf{i} + b\sin\omega t\mathbf{j}$, 求质点所受的力。

分析: 此题可由位矢对时间求二阶导, 得到加速度, 从而求得质点所受的力。

解: 由位矢对时间求一阶、二阶导数可求得质点运动的速度 \mathbf{v} 、加速度 \mathbf{a} , 即

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\mathbf{i} + b\omega\cos\omega t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -a\omega^2\cos\omega t\mathbf{i} - b\omega^2\sin\omega t\mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{r}$$

故质点所受到的力为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -m\omega^2\mathbf{r}$$

质点所受力的方向与 \mathbf{r} 相反。

1.39 如图 1.17 所示, 将质量为 m 的小球用细线悬挂在倾角为 θ 的光滑斜面上, 试求:

(1) 若斜面以加速度 a 沿图示方向运动时, 求细线的张力及小球对斜面的正(垂直于斜面的)压力。

(2) 当加速度 a 取何值时, 小球可以离开斜面?

分析: 在光滑斜面上的小球, 受到绳子作用力 T 、重力 mg 和斜面的支持力 N , 做加速运动, 因此当斜面的支持力为零时, 即小球离开斜面。

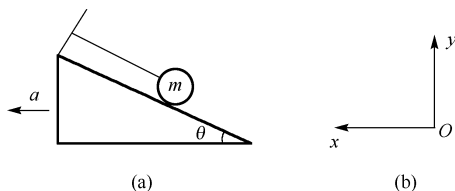


图 1.17 习题 1.39 图

解: (1) 根据题意, 建立如图 1.17(b)所示坐标系。因小球在水平方向上运动, 由牛顿第二定律有运动方程

$$T\cos\theta - N\sin\theta = ma$$

$$T\sin\theta + N\cos\theta - mg = 0$$

联立以上两式, 求得细线的张力 T 及小球对斜面的正压力 $N' (= -N)$

$$N = m(g\cos\theta - a\sin\theta)$$

$$T = m(g\sin\theta + a\cos\theta)$$

(2) 当斜面的支持力为零时, 即小球离开斜面, 令 $N = 0$, 得

$$a = g\arctan\theta$$

故当加速度 $a = g\arctan\theta$ 时, 小球可以离开斜面。

1.40 一个原来静止的原子核,经放射性衰变,放出一个动量为 $9.22 \times 10^{-16} \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ 的电子,同时该原子核在垂直方向上又放出一个动量为 $5.33 \times 10^{-16} \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ 的中微子。问衰变后原子核的动量的大小和方向。

分析: 将静止的原子核视为一系统,则原子核衰变过程中,由于只受内力作用,故系统动量守恒。

解: 原子核衰变过程中只受内力作用,故系统动量守恒,因而有

$$\mathbf{P}_{\text{核}} + \mathbf{P}_{\text{电}} + \mathbf{P}_{\text{中}} = 0$$

又由于同时该原子核在垂直方向上又放出中微子,即 $\mathbf{P}_{\text{电}} \perp \mathbf{P}_{\text{中}}$, 所以原子核的动量的大小和方向为

$$P_{\text{核}} = \sqrt{P_{\text{电}}^2 + P_{\text{中}}^2} = 1.0649 \times 10^{15} \text{ g} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\theta = \arctan \frac{P_{\text{电}}}{P_{\text{中}}} = \arctan(1.73)$$

1.41 如图 1.18 所示,一重物从高度为 h 处沿光滑轨道下滑后,在环内做圆周运动。设圆环的半径为 R ,若要重物转至圆环顶点刚好不脱离,高度 h 至少要多高?

分析: 取小球、地球为系统,光滑轨道作用于小球的支持力是外力,但在小球运动过程中支持力不做功,因此系统机械能守恒。小球恰可沿圆形轨道运动一周而不脱离轨道,则要求小球在最高点 A 具有恰可做圆周运动的向心力(机械能)。

解: 由题图受力分析可得小球在圆形轨道上任意点 D 的运动方程

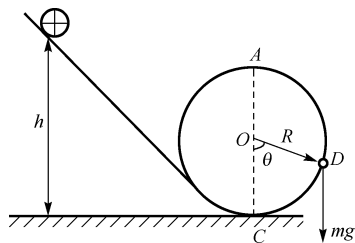


图 1.18 习题 1.41 图

$$f_n - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$$

法向支持力 $f_n \geq 0$ 。小球从 h 高度滑到任意点过程中,系统机械能守恒。选择最低点 C 为势能零点,则有

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos \theta)$$

解上述方程,得

$$h \geq R \left(1 - \frac{3}{2} \cos \theta \right)$$

对于最高点 A , 应有 $\theta = \pi$, 所以

$$h \geq R \left(1 - \frac{3}{2} \cos \theta \right) = \frac{5}{2}R$$

即小球至少应从 $h = \frac{5}{2}R$ 处下滑, 此时有

$$f_n = 0, \quad m \frac{v^2}{R} = mg$$

这就是小球恰可沿圆周轨道运动一周而不脱离轨道的动力学要求。

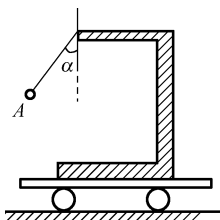


图 1.19 习题 1.42 图

1.42 如题图 1.19 所示, 质量为 m 的摆球 A 悬挂在车架上。试求在下述各种情况下, 摆线与竖直方向的夹角 α 和线中的张力 T 。

(1) 小车沿水平方向做匀速运动。

(2) 小车沿水平方向做加速度为 a 的运动。

分析: 当小车沿水平方向做匀速运动时, 摆球在水平方向受力为零; 而小车沿水平方向做加速运动时, 在水平方向受力作用, 而加速运动。

解: (1) 设小球受摆线的张力为 T 。小车沿水平方向做匀速运动时在水平方向受力为零, 即

$$T \sin \alpha = 0 \quad \text{或} \quad \alpha = 0$$

在竖直方向受摆线向上拉力 T 和竖直向下重力 mg 作用, 其合力为零

$$T \cos \alpha - mg = 0 \quad \text{或} \quad T = mg$$

(2) 小车沿水平方向做加速度运动时, 摆球在水平方向和竖直方向的运动方程为

$$T \sin \alpha = ma$$

$$T \cos \alpha = mg$$

解方程得

$$\alpha = \arctan \frac{a}{g}$$

$$T = m\sqrt{a^2 + g^2}$$

这就是小车做不同的运动时, 摆线与竖直方向的夹角 α 和线中的张力 T 的关系。

1.43 如图 1.20 所示, 质量为 m , 速率为 v 的小球, 以入射角 α 斜向与一光滑墙壁相碰, 又以原速率沿反射角 α 方向从墙壁弹回。设碰撞时间为 Δt , 求墙壁受到的平均冲力。

分析: 如图 1.20 所示, 小球以入射角 α 斜向与一光滑墙壁相碰时, 在竖直方向上小球动量未变, 但在水平方向上, 受到墙壁的平均冲力 \bar{f} 。因而可在水平方向应用冲量定理求小球受到的平均冲力。

解: 设小球与墙碰撞时的平均作用时间为 Δt , 则由冲量定理有

$$\bar{f} \Delta t = -mv \cos \alpha - mv \cos \alpha = -2mv \cos \alpha$$

墙壁受到的平均冲力为 $\bar{f}' = -\bar{f}$, 所以

$$\bar{f}' = -\bar{f} = \frac{2mv \cos \alpha}{\Delta t}$$

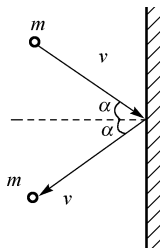


图 1.20 习题 1.43 图

1.44 如图 1.21 所示, 质量为 $m=0.1\text{ kg}$ 的木块, 在水平面上和一个劲度系数 $k=20\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ 的轻弹簧碰撞, 木块将弹簧由原长压缩了 $x=0.4\text{ m}$ 。假设木块与水平面间的滑动摩擦系数 $\mu_k=0.25$, 问在将要发生碰撞时木块的速率 v 为多少?

分析: 木块和弹簧碰撞后, 将木块和弹簧视为一系统时, 摩擦力是外力, 碰撞前木块动能转化为弹性势能及摩擦力做功, 用功能原理可求得木块的速度。

解: 设木块的质量为 m , 根据功能原理

$$A_{\text{外}} = \Delta E_k + \Delta E_p$$

在弹簧压缩过程中, 摩擦力的功、木块动能的改变、弹簧势能的改变分别为

$$A_{\text{外}} = -\mu_k mgx, \quad \Delta E_k = 0 - \frac{1}{2}mv^2, \quad \Delta E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

所以, 有

$$-\mu_k mgx = \left(0 - \frac{1}{2}mv^2\right) + \left(\frac{1}{2}kx^2 - 0\right)$$

代入数据, 解得发生碰撞时木块的速率为

$$v = \sqrt{2\mu_k gx + \frac{k}{m}x^2} = 5.83\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

1.45 一个质点在几个力同时作用下位移为 $\Delta \mathbf{r} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, 其中一个力为 $\mathbf{F} = -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, 求此力在该位移过程中所做的功。

分析: 根据功的定义, 力所做的功等于力和位移的数量积。

解: 根据做功的定义, 力 \mathbf{F} 的功为

$$A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = (-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 9\mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = 67\text{ J}$$

1.46 用弹性系数为 k 的弹簧悬挂一质量为 m 的物体, 若使此物体在平衡位置以初速度 v 突然向下运动, 问物体可降低多少?

分析: 以重物在平衡位置处为坐标原点, 向下为 x 轴正向。在物体由平衡位置向下运动过程中, 受重力和弹簧弹性力作用, 两者皆为保守力, 故可用机械能守恒定律求解。

解: 以重物在平衡位置处为坐标原点, 向下为 x 轴正向。物体在平衡位置时的机械能为

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mgx + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

又设弹簧挂上重物时弹簧的形变量为 Δx , 则有

$$mg = k\Delta x$$

当物体以初速度 v 突然向下运动到达最低点时, 物体的机械能为

$$E_2 = \frac{1}{2}k(x + \Delta x)^2$$

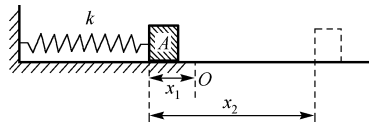


图 1.21 习题 1.44 图

由于两状态机械能守恒, 故有 $E_2 = E_1$, 即

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}k(x + \Delta x)^2$$

化简得 $kx^2 + (2k\Delta x - 2mg)x - mv^2 = 0$, 考虑 $mg = k\Delta x$, 所以有

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}}v$$

即物体在平衡位置以初速度 v 突然向下运动, 物体可降低 $x = \sqrt{\frac{m}{k}}v$ 。

1.47 力 $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ (kN), 其作用点的矢径为 $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ (m), 试求该力关于坐标原点的力矩。

分析: 本题可直接由力矩的定义求解。

解: 由力矩的定义

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \times (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 29\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

1.48 一质点的质量为 m , 位矢为 $\mathbf{r} = a\cos\omega t\mathbf{i} + b\sin\omega t\mathbf{j}$ (式中 a 、 b 、 ω 均为常量), 试求质点关于坐标原点的角动量及其所受的力矩。

分析: 可按角动量和力矩定义求解。

解: 由角动量定义

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

而

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\mathbf{i} + b\omega\cos\omega t\mathbf{j}$$

故

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \\ &= (a\cos\omega t\mathbf{i} + b\sin\omega t\mathbf{j}) \times m(-a\omega\sin\omega t\mathbf{i} + b\omega\cos\omega t\mathbf{j}) = 2mab\omega\mathbf{k}\end{aligned}$$

1.49 一轻质弹簧的劲度系数为 $k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 用手推一质量 $m = 0.1 \text{ kg}$ 的物体 A 把弹簧压缩到偏离平衡位置 $x_1 = 0.02 \text{ m}$ 处, 如图 1.22 所示。放手后物体被弹出, 且沿水平面移动了距离 $x_2 = 0.1 \text{ m}$ 后停止, 试求物体与水平面间的滑动摩擦系数。

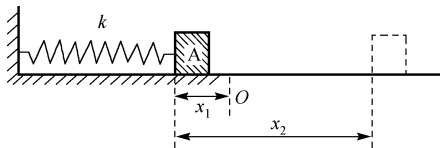


图 1.22 习题 1.49 图

分析: 此题将物体和弹簧视为一系统, 则摩擦力为外力。因此可用功能原理 ($A_{\text{外}} + A_{\text{非}} = \Delta E$) 求解。

解: 系统在放手前后的机械能分别为

$$E_1 = \frac{1}{2}kx_1^2, \quad E_2 = 0$$

物体被弹出后外力做功为

$$A_{\text{外}} = f_{\text{摩}} \cdot x_2 = \mu_k mg \cdot x_2 = E_2 - E_1$$

故有

$$\mu_k = \frac{E_2 - E_1}{mg \cdot x_2} = \frac{kx_1^2 / 2}{mgx_2} = 0.2$$

1.50 如图 1.23 所示, 系统置于以 $g/2$ 加速度上升的装置上, A、B 两物块质量均为 m , A 所处桌面是水平的, 绳子和定滑轮质量忽略不计, 若 A 与桌面间的摩擦系数为 μ_k 。试求绳中的张力。

分析: 此系统处于加速上升的装置中, 属非惯性系, 因此本题的具体求解应在惯性系中应用牛顿定律。同时注意 A、B 两物块对地、对升降梯的加速度。

解: 令 B 物块对地加速度为 a_1 , 对装置的加速度为 a_2 , 绳子对 B 物块的拉力为 T , 故有

$$mg - T = ma_1$$

而 $a_1 = a_2 - \frac{g}{2}$, 所以有

$$mg - T = m \left(a_2 - \frac{g}{2} \right)$$

对 A 物块, 在水平方向受摩擦力 $f = \mu_k N = \mu_k \frac{3}{2} mg$, 故有

$$T - \mu_k \left(\frac{3}{2} mg \right) = ma_2$$

联立求解, 得绳中的张力

$$T = \frac{3(1 + \mu_k)mg}{4}$$

1.51 假设地球为质量分布均匀的球体, 计算必须提供多少能量才能把地球完全拆散 (用万有引力常数 G , 地球质量 $m_{\text{地}}$, 地球半径 R 表示)。

分析: 要把地球拆散所需要的能量至少等于地球系统引力势能的绝对值。

解: 将地球视为一系列球壳组成, 其中半径为 r , 厚度 dr 的球壳具有的引力势能为

$$dE_p = -G \frac{m_{\text{地}} dm_{\text{地}}}{r}$$

其中, 地球质量 $m_{\text{地}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$, $dm_{\text{地}} = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$, ρ 为地球密度 $\rho = \frac{3m_{\text{地}}}{4\pi R^3}$ 。

整个地球的引力势能为

$$E_p = \int_0^R dE_p = \int_0^R \frac{G \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right) \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr}{r} = -\frac{3}{5} \frac{G m_{\text{地}}^2}{R}$$

要把地球拆散所需要的能量为

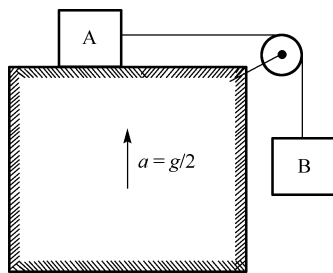


图 1.23 习题 1.50 图

$$E = |E_p| = \left| -\frac{3}{5} \frac{Gm_{\text{地}}^2}{R} \right|$$

1.52 设 A、B 两球有相同的质量和半径, 悬挂于同一高度, 静止时两球恰能接触且悬线平行。已知两球的恢复系数为 e 。若球 A 自高度 h_1 释放, 求该球碰撞后能达到的高度。

分析: 这是一非完全弹性碰撞问题。该问题分三个阶段, 第一阶段小球 A 自高度 h_1 释放到与小球 B 碰撞前, 这个阶段对 A 机械能守恒; 第二个阶段是小球 A 与小球 B 的碰撞阶段, 这个阶段小球 A 与小球 B 作为一个系统, 水平方向动量守恒; 第三阶段, 小球 A 反弹, 这个阶段小球 A 机械能守恒。

解: A 自高度 h_1 释放, 与小球 B 碰撞前这一过程机械能守恒, 即由 $E_k = E_p$, 得

$$v_{A0} = \sqrt{2gh_1}$$

小球 A 与小球 B 碰撞阶段, 水平方向动量守恒, 即有

$$mv_{A0} = mv_A + mv_B$$

又由于两球碰撞后的恢复系数为

$$e = \frac{v_A - v_B}{v_{A0}}$$

联立上两方程, 求得碰撞后小球 A 的速度

$$v_A = \frac{v_{A0}(1-e)}{2}$$

小球 A 反弹上升的过程机械能守恒, 即可求得反弹上升能达到的高度为

$$h = \frac{v_A^2}{2g} = \frac{(1-e)^2}{4} h_1$$

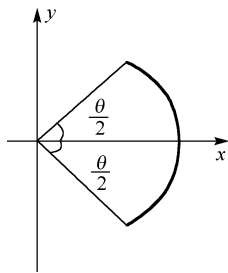


图 1.24 习题 1.53 图

1.53 求圆心角为 θ 的一段均匀圆弧在图 1.24 所示坐标系中的质心坐标。

分析: 这是一个求质量为线分布物体的质心问题, 可直接应用质心坐标公式求解。

解: 建立如图所示坐标系。由质心公式

$$r_c = \frac{\int_l r \lambda dl}{\int_l \lambda dl}$$

由对称性分析可知一段均匀圆弧关于 x 轴对称, 所以

$$y_c = 0$$

$$x_c = \frac{\int x \lambda dl}{m} = \frac{\int_{-\theta/2}^{\theta/2} R \cos \alpha \lambda R d\alpha}{m} = \frac{2R \sin \frac{\theta}{2}}{\theta}$$

1.54 如图 1.25 所示, 光滑地面上有一辆质量为 M 的静止小车, 小车上—长为 L 的

轻绳将小球 m 悬挂于 O 点。把绳水平拉直, 然后将小球由静止释放, 求小球运动到最低点时的速率。

分析: 设小球和小车为一系统。因为小球在下落过程中, 只有保守力做功, 故系统机械能守恒; 另在水平方向, 因为小球不受外力作用, 故系统在此方向动量守恒。所以只要应用机械能守恒定律和水平方向动量守恒定律建立相应方程, 即可求得小球到最低点时的速率。

解: 在小球由静止到释放过程中, 只有保守力做功, 故系统机械能守恒, 即

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = mgL$$

又由于系统在水平方向不受外力, 故在此方向系统动量守恒, 即有

$$0 = mv + MV$$

联立求解得, 小球到最低点时的速率

$$v = \sqrt{\frac{2MgL}{M+m}}$$

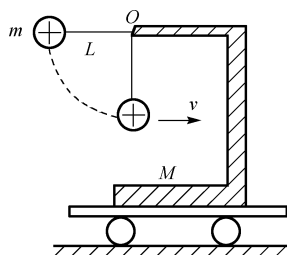


图 1.25 习题 1.54 图

1.55 在一光滑的水平面上, 有一轻弹簧, 劲度系数为 $k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 一端固定于 O 点, 另一端连接一质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 的滑块, 如图 1.26 所示。设开始时, 弹簧的长度 $l_0 = 0.2 \text{ m}$ (自然长度), 滑块速度 $v_0 = 5.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 方向与弹簧垂直。当弹簧转过 90° 时, 其长度 $l = 0.5 \text{ m}$, 求此时滑块速度 v 的大小和方向。

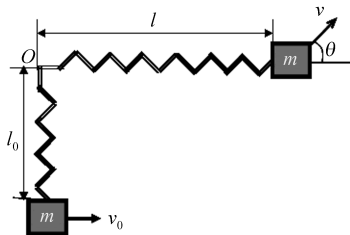


图 1.26 习题 1.55 图

分析: 设弹簧和木块为一系统。因该系统在水平面上, 绕点 O 旋转, 而重力、支持力不做功, 只有弹力做功, 所以系统机械能守恒、角动量守恒。故可应用机械能守恒、角动量守恒求解。

解: 物体在运动过程中, 只有弹力做功, 且弹力对点 O 为有心力, 故系统机械能、角动量守恒, 即有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

$$l_0mv_0 = l \sin \theta mv$$

解此方程组得滑块速度 v 的大小和方向

$$v = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \theta = 30^\circ$$

第2章 刚体和流体

在许多实际问题中，物体的运动与其大小和形状有关，甚至在受外力时还有形变，因此在这种情况下，质点模型则不再适用。如果所讨论的物体不能忽略其大小和形状，且物体无论在多大的外力作用下，物体内部任意两点间的距离始终保持不变，我们把这样的物体称为刚体。刚体和质点一样都是从实际物体中抽象出来的一种理想模型。在研究物体运动时，可以将刚体看成无数个质量微元连续组成的一个系统。由于忽略了物体的形变，所以刚体也可以看做各质元间距离保持不变的质点系。于是，可以用有关质点系的知识去分析和研究刚体。

在一定的外界条件下，根据组成物质的分子间距离和相互作用力强弱的不同，将物质划分为固体、液体和气体，而根据物质的受力和运动特性的不同，物质又可划分为固体和流体。流体包括液体和气体。固体既能承受法向力（包括压力和拉力），又能承受切向力，在弹性范围内作用力使固体产生有限的变形，作用力消失，变形消失，固体恢复到原来的形状；而流体只能承受压力，不能承受拉力，在静止流体中只要有切向力的作用，不管它多么小，在足够长的时间内流体将产生连续不断的变形，这种变形就是我们所说的流动，因此，也称能流动的物质为流体。水、空气、酒精、润滑油等是常见的流体。

本章主要研究两部分内容，一是在总结牛顿力学分析方法的基础上，研究刚体的运动；二是研究作为流体的物质（理想流体）的运动。刚体和理想流体是在研究方法上建立两种质点系的理想模型。在研究刚体中主要讨论刚体的定轴转动及规律、刚体定轴转动的动能定理及角动量定理；在研究流体时主要讨论理想流体稳定流动时所遵循的连续性原理如伯努利方程。另外也简单讨论黏性液体的流动，如泊肃叶定律和斯托克斯定律。

2.1 学习要求

1. 刚体的基本运动

（1）理解刚体模型，理解转动惯量的概念，会计算一些简单的匀质物体对定轴转动的转动惯量。

（2）掌握描述刚体转动的角量与线量的关系；理解力矩的功、定轴转动的转动动能等概念，掌握刚体定轴转动的动能定理，能在有刚体绕定轴转动的问题中正确地应用机械能守恒定律。

（3）掌握刚体定轴转动的转动定律，能熟练地运用转动定律来分析、计算一些刚体定轴转动的问题。

（4）掌握角动量概念，理解刚体的定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律及其适用条件，并能应用这些定律分析解决简单的刚体运动的力学问题。

2. 流体

(1) 理解理想流体模型，理解稳恒流动（定常流动）。

(2) 理解流线和流管，层流、黏性力、速度梯度、黏滞系数、质量流量、体积流量、湍流、雷诺数等概念。

(3) 理解静止流体内的压强公式，理解牛顿黏性定律，理解理想流体的连续性方程和伯努利方程、泊肃叶定律、斯托克斯定律。

(4) 了解流体力学与血液流体力学的关系；会用连续性方程解释血流速度的变化规律。

(5) 理解测量气体流速仪器（皮托管）的工作原理，掌握人体平躺、直立时动脉、静脉、心脏部位的血压情况。

2.2 内容提要

1. 基本概念

(1) 刚体

在外力的作用下，物体的大小和形状都不变的物体，称为刚体。刚体是物体的又一种理想模型。例如：某一特殊的质点系中，无论它在多大的外力作用下，系统内任意两质点间的距离始终保持不变。

(2) 刚体的基本运动

① 刚体的平动：刚体在运动中，其上任意两点之间的连线始终保持平行。

② 刚体的定轴转动：刚体在运动过程中，其上所有的质点都绕同一固定转轴做圆周运动。

(3) 转动惯量

转动惯量是表征刚体转动惯性大小的物理量，定义为

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2 \quad (2-1a)$$

式中， Δm_i 为刚体中任一质量元， r_i 为该质量元到转轴的距离。当刚体质量为连续分布时， J 表示为

$$J = \int_V r^2 dm \quad (2-1b)$$

计算转动惯量的平行轴定理

$$J = J_c + mh^2 \quad (2-1c)$$

式中， J_c 是刚体对通过刚体质心的轴线的转动惯量， J 是刚体对任一转轴的转动惯量，它等于刚体对通过质心并与该轴平行的轴的转动惯量 J_c 加上刚体质量 m 与两轴间距离 h 的二次方的乘积。由式（2-1c）可见， J 的大小不仅与刚体质量有关，还与质量的分布和转轴的位置有关。

(4) 刚体转动的角量与线量的关系

某时刻刚体上某质点的角位置（角坐标）为 θ ，质点绕定轴做半径为 R 的圆周运动时，

角位置随时间的变化表示为 $\theta = \theta(t)$ ，绕定轴的角速度为 ω ，角加速度为 α 。则某时刻该质点角量与线量的关系为

$$\begin{aligned}\Delta s &= R\Delta\theta \\ v &= R\omega \\ a_{\tau} &= R\alpha \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = R\omega^2\end{aligned}\quad (2-2)$$

式中， a_{τ} 、 a_n 分别为刚体上某点的切向加速度和法向加速度。

2. 刚体定轴转动的描述

(1) 刚体对定轴的转动定律

刚体在总外力矩 M_z 的作用下所获得的角加速度 α 与总外力矩 M_z 的大小成正比，并与转动惯量 J 成反比，这种关系称为定轴的转动定律，其数学表达式为

$$M_z = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt} \quad (2-3)$$

式(2-3)表明了力矩的瞬时作用规律， M_z 为力 F 对转轴 Oz 的力矩。与牛顿第二定律 $F = ma$ 类比，力矩 M_z 与力 F 对应，转动惯量 J 与质量 m 对应，角加速度 α 与加速度 a 对应。

(2) 刚体对定轴的角动量定理和角动量守恒定律

① 刚体对定轴的角动量：刚体的转动惯量与角速度的乘积为刚体对定轴的角动量，即

$$L_z = J_z \omega \quad (2-4)$$

② 刚体对定轴的角动量定理：某一时间段内作用在刚体上的外力的冲量矩等于刚体在该时间段内的角动量的增量，这种关系称为定轴的角动量定理，其数学表达式为

$$\int_{t_2}^{t_1} M_z dt = L_2 - L_1 \quad (2-5)$$

③ 角动量守恒定律：当刚体所受的外力对转轴的力矩代数和为零时，刚体对该轴的角动量保持不变，即角动量守恒，数学表达式为

$$\int_{t_2}^{t_1} M_z dt = L_2 - L_1 = 0 \quad \text{或} \quad L_z = \text{恒量} \quad (\text{条件: } M_z = 0) \quad (2-6)$$

(3) 刚体的定轴转动动能和动能定理

① 力矩的功：刚体在力矩作用下绕定轴转过 θ ，则此过程中力矩对刚体所做的功为

$$W = \int_0^{\theta} M_z d\theta \quad (2-7)$$

② 刚体绕定轴转动的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (2-8)$$

③ 刚体绕定轴转动的动能定理：合外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量，即

$$W = E_{k_2} - E_{k_1} = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 \quad (2-9)$$

④ 机械能守恒定律：系统只受保守内力做功时，系统的总机械能保持不变，即

$$E_k + E_p = \text{恒量} \quad (2-10)$$

3. 流体及流体运动的描述

(1) 理想流体、实际流体、定常流动

一种设想的不可压缩，完全没有黏滞性的流体，即在流动时各层之间没有相互作用的切应力，没有内摩擦力，这样的流体称为理想流体；实际流体在流动时各层之间存在相互作用的切应力，有内摩擦力。定常流动是指流体流动时，流动空间各点的速度都不随时间变化，这种流动称为定常流动（或稳定流动）。

(2) 流线及流管、流管截面

在稳定流动液体中任取一个与流动方向垂直的小面元 S ，通过该面元的周边各点引出的线，称为流线。流线性质：任一点在同一时刻，流线不能相交，仅有一个速度；流线的疏密程度代表流速的大小；一般情况下，流线开关随时间变化。由许多流线所围成的管状区域称为流管。在稳定流动中，流管形状固定，管内外流体不交换；流体划分成很多流管后，只要掌握一个流管中液体的运动规律，整个液体的流动规律就可以知道了。一般将流管的横截面称为流管截面。

(3) 层流、湍流、黏性力、速度梯度

层流：实际黏性流体的速度较小时，液体出现分层流动，各层流体互不混合保持自己的流动速度，这种流动称为层流，也称为片流。

湍流：黏性流体的速度较小时，各流层互相混合，有时出现漩涡，并伴有声音产生，整个流体变得杂乱不稳定，这种流动称为湍流。

黏性力：实际流体流动时由于有层流，相邻的两层流体间做相对滑动，而在两层之间存在的切向阻力称为黏性力，也称为内摩擦力。

速度梯度：当流体流动有层流时，其速度是逐层变化的，这种变化可以用速度梯度来表示。若流体在管道中流动时，流体沿半径方向的变化率，称为速度梯度。若相距为 Δx 的两流层的速度差为 Δv ，则 $\Delta v / \Delta x$ 表示这两层之间速度的平均变化率，当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，则速度梯度为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v / \Delta x = \frac{dv}{dx}, \text{ 单位: } s^{-1} \quad (2-11)$$

(4) 牛顿黏滞定律、雷诺数

牛顿黏滞定律：如图 2.1 所示，若流体沿 yOz 平面分层流动，设想相邻两层间相距 Δx ，两层间的速度之差为 Δv ， $\Delta v / \Delta x$ 表示 Δv 在 x 方向速度的平均变化率， dv / dx 表示层流速度沿 x 方向的变化率，称为流速梯度。实验发现，黏滞力 f 的大小与两流层的接触面积 S 以及接触处的速度梯度 $\frac{dv}{dx}$ 成正比，即

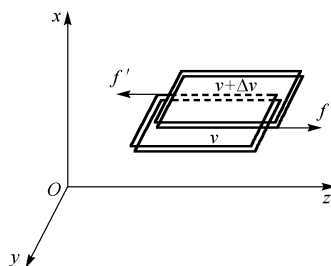


图 2.1 牛顿黏滞定律

$$f = \eta S \frac{dv}{dx} \quad (2-12a)$$

或

$$\tau_{(\text{切应力})} = \frac{f}{S} = \eta \frac{dv}{dx} = \eta \gamma \quad (2-12b)$$

式(2-12a)或式(2-12b)即为牛顿黏滞定律, 式中 η 为黏滞系数。

雷诺(Reynolds)数: 是一种表征流体流动情况的无量纲数, 用 Re 表示。若液体在黏滞系数为 η , 密度为 ρ , 流体在半径为 r 的圆管中以平均速率 v 流动, 则

$$Re = \frac{\rho v r}{\eta} \quad (2-13)$$

式(2-13)是用来判断层流或湍流的经验公式。通常

$$\begin{cases} Re \leq 1000, & \text{流体做层流} \\ 1000 < Re < 1500, & \text{流动不稳定} \\ Re \geq 1500, & \text{流体做湍流} \end{cases}$$

层流是无声的, 而湍流则伴随有噪声, 频率可达数百赫兹, 这在医学上具有实用价值。例如, 动、静脉堵塞以及心脏瓣膜狭窄在血管中引起的杂音, 都是湍流产生的。测量血压时, 在听诊器中所听到的声音, 也是血液通过被压扁的血管时, 产生湍流所发生的。

(5) 流体中的压强

流体中的压强有两种情况:

一是静止流体中任一点上各个方向相等的流体的压强, 称为静压强, 表示为

$$p + \rho gh \quad (2-14)$$

式中 p 为外部作用于流管截面的压强, ρgh 为重力引起的压强, 两者之和其大小与作用面的方向无关。

二是流体压强与流速的关系。在理想流体条件下, 流体压强与流速可相互转换。流速高则压强小; 流速低则压强大, 这就是伯努利(J. Bernoulli)原理(一般也称为伯努利方程)。

(6) 理想流体的连续性方程和伯努利方程

① 连续性方程: 如果理想流体在一段有多个入口和多个出口的流管中做稳定流动, 那么流体的速率与流管截面积的乘积是一个恒量, 即

$$S_{\text{in}} v_{\text{in}} = S_{\text{out}} v_{\text{out}} \quad \text{或} \quad Q_{\text{in}} = Q_{\text{out}} \quad (2-15)$$

式(2-15)为理想流体稳定流动时的连续性方程, 从该方程可以看出: 所研究的流管中入口与出口处的流速与横截面积相关, 总横截面积大处流速小, 反之则流速大。

② 伯努利方程: 在做稳定流动的流体中, 在同一流管中任何一点处, 流体每单位体积的动能和势能以及该处压强之和是个常量。其数学形式为

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{恒量} \quad (2-16)$$

③ 伯努利方程的应用

水平管中流体压强与流速的关系。联立式(2-15)、式(2-16)可得：当理想流体在粗细不同的水平管中做稳定流动时，横截面积大处流速小静压强大，横截面积小处流速大静压强小。

空吸作用：当横截面积小的地方流速达到或超过某一值时，该处的静压强小于外面流体的静压强，从而使该处表现出吸入外面流体的现象，这种现象称为空吸作用。

皮托管（Pitor tube）用于测量液体或气体的流速。

如图 2.2 所示是皮托管的工作原理图，A 管的开口与 B 管的开口在同一水平面上，并且 A 管的开口与流线垂直，形成流速为零的滞止区，使 A 处的流速为零。而 B 管的开口与流线平行，故它对流体的流动无影响，即 B 点处的流速就是待测液体的流速，则利用伯努利方程得

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

因为 $v_A = 0$ ， $v_B = v$ ，所以有

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 = \frac{1}{2}\rho v^2 = p_A - p_B = \rho g \Delta h$$

由此得到用皮托管测量流体流速公式，为

$$v = \sqrt{2g\Delta h} \quad (2-17)$$

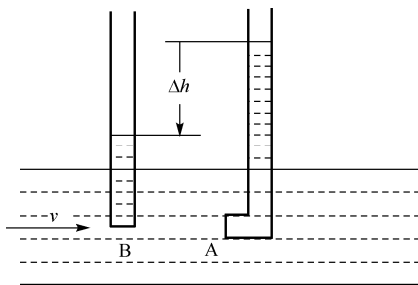


图 2.2 皮托管的工作原理图

压强与高度的关系：对于流体，假设理想流体在粗细均匀（即流速保持不变）或者流速的改变可不必考虑时，而在高度不同的管中流动，则由伯努利方程为

$$p_1 + \rho gh_1 = p_2 + \rho gh_2 \quad \text{或} \quad p + \rho gh = \text{恒量} \quad (2-18)$$

该式表明：在流速不变的情况下，处于高处的液体压强较小，处于低处的液体压强较大。

思考题：人体在平卧时或直立时，头部的动脉压、脚部的动脉压是否相同？

心脏做功的计算：血液在血管中流动时，沿途都克服阻力消耗能量。要想血液循环不停地继续下去，血液必须不断地被补充能量，这部分能量是由心脏做功而来的，故血液不停地循环是由心脏不断地做功来维持的。心脏做功，可应用伯努利方程计算求得。

设单位体积血液离开心室时的能量为 E_1 、单位体积血液进入心房时的能量为 E_2 ，则

$$E_1 = p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

$$E_2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

所以，心脏做功为

$$W = E_1 - E_2$$

由于 h_1 、 h_2 很接近，且设为参考高度，令 $h_1 \approx h_2 = 0$ ，所以有

$$W = E_1 - E_2 = p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) \quad (2-19)$$

(7) 泊肃叶 (Poiseuille) 定律

法国医生泊肃叶为了明确心脏和血流间的关系，研究了黏性流体在刚性管中流动的规律：在精细均匀的水平管中做层流的黏性流体，其流量 Q 和管道两端的压强差 $p_1 - p_2$ ($p_1 > p_2$) 之间有如下关系：

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (p_1 - p_2) = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p = \frac{\Delta p}{R_f} \quad (2-20)$$

式中， R 是管的半径， L 是管的长度， η 是流体的黏滞系数， $R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$ 称为流阻，单位为 $\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ （在医学上习惯称为外周阻力，它的大小由流体的黏滞系数和管道的几何形状决定）。这就是著名的泊肃叶经验公式。

(8) 斯托克斯 (G.G.Stokes) 定律

当一个小球在实际液体中以较小的速度运动时，球表面将附着一层液体并且和球一起运动，此层液体必会与它相邻液体层产生内摩擦力，其大小为

$$f = -6\pi\eta r v \quad (2-21)$$

式中， η 是流体的黏滞系数， r 是球体半径， v 是球体相对流体的速度。

(9) 黏性流体在医学中的应用

① 血流阻：血液在血管中流动的流阻，称为血流阻（医学上称为外周阻力，体循环的总流阻，称为总外周阻力）。任何一段血管两端的血压差 Δp 、流量 Q 与流阻 R 之间的关系仍遵从泊肃叶公式，即 $R_f = \Delta p / Q$ 来计算外周阻力，式中 Δp 为平均动脉压， Q 为每秒钟的输出量。

② 血流黏滞度：血流黏滞度即血液的黏滞系数。血液黏滞度是与血液的组分、温度、酸碱度以及渗透压等有关，很多病变发生时，会使血液的黏滞度发生异常。因此，对血液黏滞度的研究为解释病因、治疗疾病提供新的思路。

2.3 重点难点分析

1. 本章重点

(1) 刚体模型概念, 刚体的平动、转动、转动惯量等概念, 及描述刚体运动的角量与线量的关系; 正确理解刚体定轴的转动定律、定轴的角动量定理和角动量守恒定律、定轴转动动能和动能定理, 并能应用这些定律和定理解决简单的刚体运动的力学问题。

(2) 正确理解理想流体模型, 注意体会理想流体与实际流体之间的差异, 理解流线及流管、流管截面, 流体速度场、稳定流动、流量等概念; 正解掌握连续性方程、伯努利方程、牛顿黏滞定律、泊肃叶定律及其相关的应用。

2. 本章难点

(1) 本章难点有基础部分和综合应用两部分, 对刚体模型的理解、刚体对定轴的转动惯量计算时质量分布的分析; 刚体受力对给定点或定轴的力矩, 特别是刚体所受摩擦力矩的分析。这类问题主要从模型的定义, 物理量的定义入手加深理解。刚体对某轴的转动惯量及刚体受摩擦力矩这类问题, 要用微元法分析, 对具体的物体选取适当的微元, 写出这个微元 (如质量元 dm), 再求该质元对转轴的转动惯量, 最后再积分; 又如求摩擦力矩, 先找到微元受的摩擦力矩 dM , 然后再对其积分求出 M 。刚体定轴的转动定律、定轴的角动量定理和角动量守恒定律、定轴转动动能和动能定理求解刚体运动的力学问题有一定的难度, 注意学习例题中的分析方法。

(2) 本章流体的学习是之前没有接触过的内容, 所有概念的定义, 理解上都有一定的难度, 如理想流体模型, 以及描述理想流体流动的一些物理量, 比如流线及流管、流管截面、流体速度场、稳定流动、流量等概念理解起来有一定的难度。理解相应的描述流体运动的基本定律, 如连续性方程、伯努利方程及其相关的应用也有一定的难度。特别是涉及实际流体问题时, 如在医学中应用牛顿黏滞定律、泊肃叶定律求解部分流体问题, 有一定的困难, 要注意这部分知识的学习。

2.4 精选例题与习题解答

1. 精选例题

例 2-1 一均匀球, 绕着通过其中心的轴以一定的角速度转动着, 如果该球的半径减至原来半径的 $1/3$, 那么该球的动能增为原来的多少倍?

分析: 在球半径减小的过程中, 对中心轴的转动惯量将变小, 但角动量保持不变。

解: 设匀质球的质量为 m , 半径为 r , 则绕中心轴以角速度 ω 转动时的角动量、转动动能和转动惯量分别为

$$L_0 = J\omega, \quad E_k = \frac{1}{2}J\omega^2, \quad J = \frac{2}{5}mr^2$$

在球的半径减小过程中, 对中心轴的角动量守恒, 有

$$L_0 = J\omega = J'\omega'$$

式中, J' 和 ω' 分别为球的质量 m 保持不变, 半径减至 r/n 时, 该球对中心轴的转动惯量和角速度, 即

$$J' = \frac{2}{5}mr'^2 = \frac{2}{5}m\left(\frac{r}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}J$$

$$\omega' = \frac{J\omega}{J'} = n^2\omega$$

相应的转动动能为

$$E'_k = \frac{1}{2}J'\omega'^2 = n^2E_k$$

所以, 该球的动能增为原来的 n^2 倍。

例 2-2 (1) 求质量为 m , 半径为 R 的匀质圆环, 对通过圆心且平行环面的轴的转动惯量; (2) 如果是质量为 m , 半径为 R 的匀质圆盘, 对通过圆心且平行盘面的轴的转动惯量又是多少?

分析: 本题中圆环中任一质元对给定转轴的距离不同, 因此可求环上质元对转轴的转动惯量, 然后积分求环对轴的转动惯量; 对于圆盘可看成是由许多半径不同的同心圆环所组成, 而每个圆环的转动惯量由第一问求得, 这些圆环对转轴的转动惯量之和就等于圆盘对该轴的转动惯量。

解: (1) 在圆环上取长度为 dl 的线元, 其质量为 $dm = \frac{m}{2\pi R}Rd\theta$, 如图 2.3(a)所示, 线元到转轴的距离为 $r = R\sin\theta$, 故圆环对给定转轴的转动惯量为

$$J = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} (R\sin\theta)^2 \frac{m}{2\pi R} R d\theta = \frac{1}{2}mR^2$$

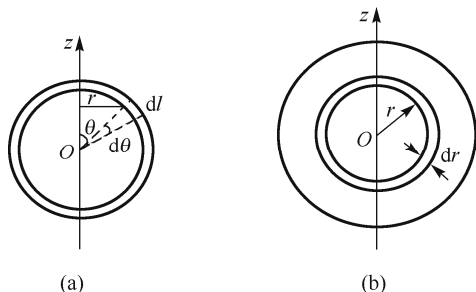


图 2.3 例 2-2 图

(2) 因为圆盘由若干同心圆环所组成, 而每个圆环对轴的转动惯量由第一问求得, 这些圆环的转动惯量之和就等于圆盘的转动惯量。在距离圆心为 r 的地方取宽度为 dr 的圆

环,如图 2.3(b)所示,此圆环的质量 $dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr$, 该圆环的转动惯量为 $dJ = \frac{1}{2} r^2 dm$, 故圆盘的转动惯量为

$$J = \frac{1}{2} \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{1}{4} m R^2$$

例 2-3 如图 2.4 所示,一根质量分布均匀的铁丝,质量为 m , 长度为 l , 在其中点 O 处弯成 $\theta = 120^\circ$, 放在 Oxy 平面内, 求铁丝对 Ox 轴、 Oy 轴的转动惯量。

分析: 运用微元法, 由转动惯量的定义式积分求解。

解: 由于 OB 段与 Ox 轴重合, 其对 Ox 轴的转动惯量为零, 因此整根铁丝对 Ox 轴的转动惯量就等于 OA 段对 Ox 轴的转动惯量。在 OA 段上取一质量元 $dm = \frac{m}{l} dl$, $dl = \frac{dy}{\cos 30^\circ}$, 由转动惯量的定义有

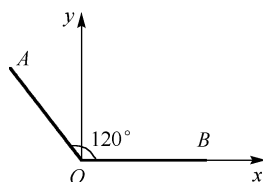


图 2.4 例 2-3 图

$$\begin{aligned} J_{Ox} &= \int y^2 dm = \int_0^{\frac{1}{2} \cos 30^\circ} y^2 \frac{m}{l} \frac{dy}{\cos 30^\circ} \\ &= \frac{m}{l} \cdot \frac{1}{\cos 30^\circ} \cdot \frac{y^3}{3} \bigg|_0^{\frac{1}{2} \cos 30^\circ} = \frac{1}{32} ml^2 \end{aligned}$$

同理对 Oy 轴的转动惯量

$$\begin{aligned} J_{Oy} &= J_{AO} + J_{OB} = \int_0^{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} x^2 \frac{m}{l} \frac{dx}{\sin 30^\circ} + \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ &= \frac{5}{96} ml^2 \end{aligned}$$

例 2-4 如图 2.5 所示,一根长为 l , 质量为 m 的匀质细棒放在粗糙的水平桌面上, 棒可绕过端点 O 的竖直 PQ 轴转动, 已知开始转动时棒的角速度为 ω_0 , 棒与桌面间的摩擦系数为 μ 。求: (1) 细棒绕 PQ 轴转动时受到的摩擦力矩; (2) 若此细杆只受此摩擦力矩的作用, 它转动多少圈后静止。

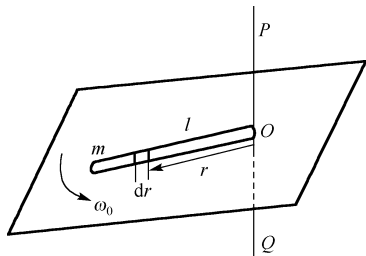


图 2.5 例 2-4 图

分析: 由于细杆所受摩擦力矩是分散力, 各处的力臂不同, 要计算摩擦力矩必须用积分法。

解: (1) 设在杆上距点 O 的距离为 r 位置处取一线元 dr , 线元 dr 的质量为 $dm = \lambda dr$, 其中 $\lambda = \frac{m}{l}$ 是杆的质量线密度, 该线元所受的摩擦力为 $df = -\mu \lambda g dr$, 其方向与该点速度方向相反, 该线元所受到的摩擦力矩为

$$dM = r df = -\mu \lambda g r dr$$

量线密度, 该线元所受的摩擦力为 $df = -\mu \lambda g dr$, 其方向与该点速度方向相反, 该线元所受到的摩擦力矩为

由此可得细杆所受的摩擦力矩为

$$M = \int dM = -\mu\lambda g \int_0^l r dr = -\frac{1}{2}\mu\lambda gl^2$$

由刚体的定轴转动定律可得

$$J\beta = -\frac{1}{2}\mu\lambda gl^2$$

细杆绕通过端点并垂直于杆的轴的转动惯量为 $J = \frac{1}{3}ml^2$ ，因此得角加速度

$$\beta = -\frac{3\mu g}{2l}$$

(2) 由于角加速度 β 为恒量，因此细杆做匀减速转动，故

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta\theta$$

当转动停止时， $\omega = 0$ ，由此可以求得转动停止时细杆转动的圈数，为

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = -\frac{\omega_0^2}{4\pi\beta} = \frac{\omega_0^2 l}{6\pi\mu g}$$

例 2-5 如图 2.6 所示，有一圆形开口容器，高 $H = 70 \text{ cm}$ ，截面积为 $S = 600 \text{ cm}^2$ ，储满清水。如容器底部有一个 $S_{\text{孔}} = 1 \text{ cm}^2$ 的小孔，求该容器的水流完所需要的时间 t 。

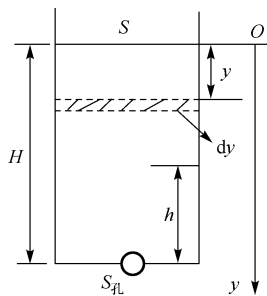


图 2.6 例 2-5 图

分析：如图建立竖直向下坐标轴 Oy ，坐标原点位于开始水位。当水位降低了 y 时，计算出小孔流出的水的流速；假设在 dt 时间内，水位降低了 dy ，则其体积减少了 Sdy ，根据流量守恒，此体积的减少量应等于在 dt 时间内从小孔流出的体积 $S_{\text{孔}} \cdot v_2 dt$ ，由此建立时间与下降高度之间的方程，从而求出时间。

解：已知容器高 $H = 70 \text{ cm} = 0.70 \text{ m}$ ，容器横截面积 $S = 600 \text{ cm}^2 = 600 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ，小孔的面积 $S_{\text{孔}} = 1 \text{ cm}^2 = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 。

假设在 t 时刻液面的高为 y ，小孔水的流速为 v_2 。在 dt 时间内，水位以 v_1 速度降低了 dy ，则其体积减少为

$$dV = Sdy$$

根据流量守恒，此体积的减少量应等于在 dt 时间内从小孔流出的体积，即

$$dV = Sdy = S_{\text{孔}} \cdot v_2 \cdot dt$$

于是有

$$dt = \frac{Sdy}{S_{\text{孔}} v_2} \quad (1)$$

由伯努利方程得

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

取小孔位置处为零参考面, 则 $\rho g y_2 = 0$; 而又由于 $S \gg S_{\text{孔}}$, $v_1 \ll v_2$, 即有 $\frac{1}{2}\rho v_1^2 \approx 0$ 。所以得小孔流出的速度为

$$v_2 = \sqrt{2g(H-y)} \quad (2)$$

将式②代入式①得

$$dt = \frac{S dy}{S_{\text{孔}} v_2} = \frac{S dy}{S_{\text{孔}} \sqrt{2g(H-y)}}$$

设水位下降 $(H-h)$ 时所需的时间为 t_1 , 则有

$$\int_0^{t_1} dt = \int_0^{H-h} \frac{S dy}{S_{\text{孔}} \sqrt{2g(H-y)}}$$

积分后得

$$t_1 = \frac{2S}{S_{\text{孔}} \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h})$$

当水全部流完时, 即取 $h=0$, 则所需用时间

$$t = \frac{2S}{S_{\text{孔}}} \left(\sqrt{\frac{H}{2g}} \right) = \frac{S}{S_{\text{孔}} g} \sqrt{2gH}$$

代入计算得

$$t = \frac{S}{S_{\text{孔}} g} \sqrt{2gH} = \frac{600 \times 10^{-4}}{1.0 \times 10^{-4} \times 9.8} \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.7} = 226.8 \text{ s}$$

例 2-6 血液从左心室流出的速度 $v_1 = 30 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, 血压 $p_1 = 120 \text{ mmHg}$, 血液流回右心房的速率 $v_2 = 5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, 血压 $p_2 = -6 \text{ mmHg}$, 高度 $h_1 \approx h_2$ 。假设心脏每分钟输出血量为 5250 ml , 血液密度 $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 求心脏做功和功率。($1 \text{ mmHg} = 133.3 \text{ Pa}$)

分析: 在体循环中, 心脏对单位体积血液所做的功, 它等于单位体积血液所损失的能量。

解: 设单位体积血液离开心室时的能量为 E_1 、单位体积血液进入心房时的能量为 E_2 , 则

$$E_1 = p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

$$E_2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

所以, 心脏做功为

$$W = E_1 - E_2$$

由于 h_1 、 h_2 很接近, $h_1 \approx h_2$, 所以心脏每分钟对单位体积血液所做的功为

$$\begin{aligned} w &= E_1 - E_2 = p_1 - p_2 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) \\ &= [120 - (-6)] \times 133.3 + \frac{1}{2} \times 1.05 \times 10^3 \times (30^2 - 5^2) \times 10^{-4} \approx 1.68 \times 10^4 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

则心脏每分钟对血液做的功、功率分别为

$$W = wV = 1.68 \times 10^4 \times 5.250 \times 10^{-6} = 88.4 \text{ J}$$

$$P = \frac{W}{60} = \frac{88.4}{60} = 1.47 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

例 2-7 成年人主动脉的半径约为 $1.3 \times 10^{-2} \text{ m}$, 问在一段 $L = 0.2 \text{ m}$ 距离内的流阻 R_f 和压强降落 Δp 为多少? 设血流量 $Q = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, 黏滞系数 $\eta = 3.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。

分析: 任何一段血管两端的血压差 Δp 、流量 Q 与流阻 R_f 之间的关系仍遵从泊肃叶公式, 故可先求出流阻, 然后求得压强降落。

解: 由流阻公式有

$$R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \frac{8 \times 3.0 \times 10^{-3} \times 0.2}{3.14 \times (1.3 \times 10^{-2})^4} = 0.535 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$$

压强降落为

$$\Delta p = R_f Q = 0.535 \times 10^5 \times 1.0 \times 10^{-4} = 5.35 \text{ Pa}$$

2. 习题解答

(一) 刚体部分

2.1 两个匀质圆盘 A、B 的密度分别为 ρ_A 和 ρ_B 。若 $\rho_A > \rho_B$, 但两圆盘质量与厚度相同, 如两盘对通过盘心、垂直于盘面轴的转动惯量各为 J_A 和 J_B , 则 J_A _____ J_B (填“>”、“<”、“=”)。

分析与解: 因为物体对某转轴的转动惯量与刚体本身质量的分布及轴的位置有关, 即 $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$, 又因为两圆盘质量与厚度相同, 则当 $\rho_A > \rho_B$ 时,

有 $r_A < r_B$, 故 $J_A < J_B$ 。

2.2 如图 2.7 所示, 两个完全相同的定滑轮分别用绳绕几圈以后, 在 A 轮绳端系一质量为 m 的物体, 在 B 轮上施一恒力 $F = mg$ 拉绳, 则两轮转动的角加速度 β_A _____ β_B 。(填“>”、“<”、“=”)。

分析与解: 图 2.7(a)中, 重物及定滑轮在重力 mg 的作用下, 产生加速度; 图 2.7(b)中定滑轮在 $F = mg$ 的作用下, 产生加速度。

图 2.7(a)和图 2.7(b)的动力学方程分别为

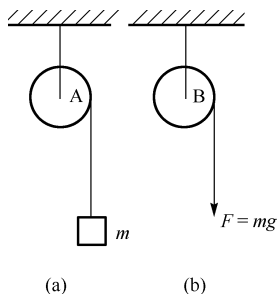


图 2.7 习题 2.2 图

$$\text{图(a): } mg - T = ma = mR\beta_A, \quad TR = J\beta_A$$

$$\text{图(b): } FR = mgR = J\beta_B$$

解上述方程组得定滑轮的角加速度，分别为

$$\beta_A = \frac{mgR}{J + MR^2}$$

$$\beta_B = \frac{mgR}{J}$$

可见，两定滑轮转动的角加速度 $\beta_A < \beta_B$ 。

2.3 一长为 l 、质量可以忽略的直杆，两端分别固定有质量为 $2m$ 和 m 的小球，杆可绕通过其中心 O 且与杆垂直的水平光滑固定轴在铅直平面内转动。开始杆与水平方向成某一角度 θ ，处于静止状态，如图 2.8 所示。释放后，杆绕 O 轴转动，则当杆转到水平位置时，该系统所受的合外力矩的大小 $|\mathbf{M}| = \underline{\hspace{2cm}}$ ，此时该系统角加速度的大小 $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

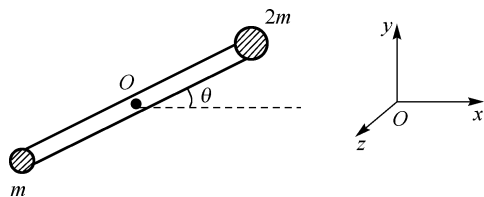


图 2.8 习题 2.3 图

分析与解：(1) 设质量为 $2m$ 的物体其重力对 O 轴的重力矩为 \mathbf{M}_1 ，质量为 m 的物体其重力对 O 轴重力矩为 \mathbf{M}_2 ，按图中坐标所示，则杆转到水平位置 $\theta = 0$ 时有

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times 2m\mathbf{g} = -mgl\mathbf{k}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{g} = mg\frac{l}{2}\mathbf{k}$$

此时合外力矩的大小为

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1| = \frac{1}{2}mgl$$

(2) 该系统角加速度的大小为

$$\beta = \frac{|\mathbf{M}|}{J} = \frac{mgl/2}{2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{2g}{3l}$$

2.4 均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图 2.9 所示。今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动到竖直位置的过程中，角速度变 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；角加速度变 $\underline{\hspace{2cm}}$ （填“大”或“小”）。

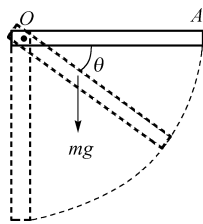
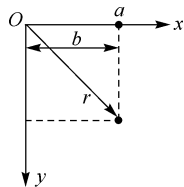


图 2.9 习题 2.4 图

分析与解：因为细棒的质量分布和转轴已确定，即转动惯量 J 在转动过程中保持不变；1) 细棒从水平位置自由下落的过程中，只有重力矩做功，所以细棒机械能守恒，势能转换为转动动能，即转动动能增加，所以角

速度变大; 2) 在细棒下降的过程中, 重力的大小方向不变, 但重力对转轴的力臂在减小, 所以重力矩减小, 由转动定理可知, 当 J 不变时, 力矩减小, 则角加速度变小。

2.5 如图 2.10 所示, x 轴沿水平方向, y 轴竖直向下, 在 $t=0$ 时刻将质量为 m 的质点由 a 处静止释放, 让它自由下落, 则在任意时刻, 质点所受的对原点 O 的力矩



$M = \underline{\hspace{2cm}}$; 该质点对原点 O 的角动量 $L = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

分析与解: 由力矩的定义, 质点 m 受重力作用, 对点 O 的力矩为 $M = r \times mg = mgbk$; 该质点对原点 O 的角动量 $L = r \times mv = mvb k = mgtb k$ 。

2.6 已知地球的质量为 m , 太阳的质量为 M , 地心与日心的距离为 R , 引力常数为 G , 则地球绕太阳做圆周运动的角动量为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

分析与解: 因为地球绕太阳转动时的向心力为太阳与地球间的万有引力, 即 $F = G \frac{Mm}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$, 由此得到 $v^2 = G \frac{M}{R}$, 故地球绕太阳做圆周运动的角动量的大小是:

$$L = mvR = m \sqrt{G \frac{M}{R}} R = m \sqrt{GMR}。$$

2.7 如图 2.11 所示, 钢球 A 和 B 质量相等, 正被绳牵着以 $\omega_1 = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 的角速度绕竖直轴转动, 两球与轴的距离都为 $r_1 = 15 \text{ cm}$ 。现在把轴上环 C 下移, 使得两球离轴的距离缩减为 $r_2 = 5 \text{ cm}$, 则钢球的角速度 $\omega_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

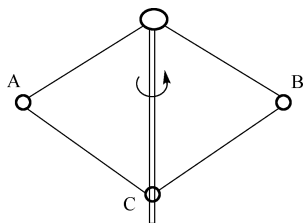


图 2.11 习题 2.7 图

分析与解: 由于两个质量相同的钢球到转轴的距离相同, 所以两个钢球所受重力矩之和为零; 由于对称, 系着钢球 A 和 B 的绳对球施加的张力 T , 对转轴的张力矩也为零, 即钢球所受的合外力矩 $\sum M = 0$, 故系统的角动量守恒。亦即 $J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$, 而由于 $J_1 = 2mr_1^2$, $J_2 = 2mr_2^2$, 所以, 两球离轴的距离由 r_1 缩减至 r_2 时, 钢球的角速度

$$\omega_2 = \frac{J_1 \omega_1}{J_2} = \frac{r_1^2 \omega_1}{r_2^2} = 36 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.8 长为 L , 质量为 m_1 的均匀细棒, 上端悬挂在 O 点, 可绕水平轴无摩擦地转动。在同一悬挂点, 有一长为 l 的轻绳系一质量为 m_2 的小球, 如图 2.12 所示。当小球悬线偏离竖直方向某一角度由静止释放时, 小球在悬点正下方与静止的棒发生碰撞, 问线长为多少时小球与棒碰后刚好静止。

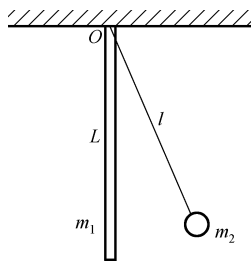


图 2.12 习题 2.8 图

分析与解: 以小球和棒为研究对象。由于水平转轴无摩擦, 且小球与棒碰撞瞬间只有极大的冲力(内力)。因此, 系统所受的合外力矩为零, 故系统角动量守恒。即

$$m_2 v l = J \omega = \frac{1}{3} m_1 L^2 \omega$$

式中 v 为小球碰撞时的速率, J 为棒的转动惯量, ω 为棒受碰撞后的角速度。由于小球碰撞后静止, 亦即将能量全部传递给棒, 由机械能守恒有

$$\frac{1}{2}m_2v^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1L^2\right)\omega^2$$

解上两式得 $m_2l^2 = J = \frac{1}{3}m_1L^2$ ，故

$$l = L\sqrt{\frac{m_1}{3m_2}}$$

2.9 飞轮的质量 $m = 60 \text{ kg}$ ，半径 $R = 0.25 \text{ m}$ ，绕其水平中心轴 O 转动，转速为 $900 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 。现利用一制动的闸杆，在闸杆的一端加一竖直方向的制动力 F ，可使飞轮减速。已知闸杆的尺寸如图 2.13 所示，闸瓦与飞轮之间的摩擦系数 $\mu = 0.4$ ，飞轮的转动惯量可按匀质圆盘计算。试求：

(1) 设 $F = 100 \text{ N}$ ，问飞轮的转动加速度是多少？飞轮在多长时间停止转动？

(2) 如果在 2 s 内飞轮转速减小一半，需加多大的力 F ？

分析：闸杆与飞轮之间的摩擦力 F_f 对飞轮 O 轴的力矩使得飞轮逐渐停止转动。该摩擦力是杆对轮的正压力 F_N 与摩擦系数 μ 的乘积，而 F_N 是轮对杆的作用力 F'_N 的反作用力。因为闸杆处于平衡状态，所以制动力 F 和 F'_N 对闸杆轴 O' 处的力矩相互平衡。故可根据转动定律求出飞轮的角加速度，进而求出飞轮在多长时间停止转动。

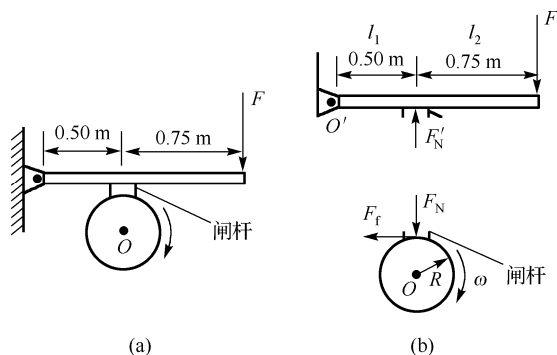


图 2.13 习题 2.9 图

解：(1) 闸杆、飞轮的受力如图 2.13(b) 所示，其中 F_N 是闸杆对飞轮的正压力，则飞轮受到的摩擦力为

$$F_f = \mu F_N$$

对于转轴 O' 闸杆所受力矩平衡，即

$$F(l_1 + l_2) - F'_N l_1 = 0 \quad (1)$$

考虑 F_N 是 F'_N 的反作用力，所以杆对飞轮的正压力的大小为

$$F_N = F'_N \quad (2)$$

由于飞轮受到的摩擦力矩为 $F_f R$ ，由转动定律

$$-F_f R = J\alpha$$

$$-\mu F_N R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha \quad (3)$$

联立式①、式②、式③可求得, 飞轮转动加速度

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{F_f R}{J} = -\frac{2\mu F(l_1 + l_2)}{m R l_1} \\ &= -\frac{2 \times 0.4 \times 100 \times (0.5 + 0.75)}{60 \times 0.25 \times 0.5} = -\frac{40}{3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

由此可见, 飞轮做匀变速转动, 故有

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

当飞轮停止转动时, 有 $\omega = 0$ 。而 $\omega_0 = \frac{900 \times 2\pi}{60} = 15 \times 2\pi$, 则飞轮停止转动时所花的时间为

$$t = -\frac{\omega_0}{\alpha} = -\frac{15 \times 2\pi}{-40/3} = 7.07 \text{ s}$$

(2) 要在 $t = 2 \text{ s}$ 内使飞轮转速减为一半, 即 $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, 则

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = -\frac{\omega_0}{4}$$

由上面飞轮转动加速度公式, 同时考虑摩擦力矩定义, 则有

$$\alpha = -\frac{F_f R}{J} = -\frac{2\mu F(l_1 + l_2)}{m R l_1} = -\frac{\omega_0}{4}$$

所以, 解上式得要在 2 s 内使飞轮转速减少一半, 需加的力 F 为

$$F = \frac{m R l_1 \omega_0}{8\mu(l_1 + l_2)} = 176.7 \text{ N}$$

2.10 如图 2.14(a)所示的装置中, 物体的质量为 m_1 、 m_2 , 定滑轮的质量为 m'_1 、 m'_2 , 半径为 R_1 、 R_2 , 设绳子为轻绳, 且长度不变。滑轮为匀质分布, 忽略轮轴摩擦, 绳与滑轮间没有相对运动。求物体的加速度及绳中张力。

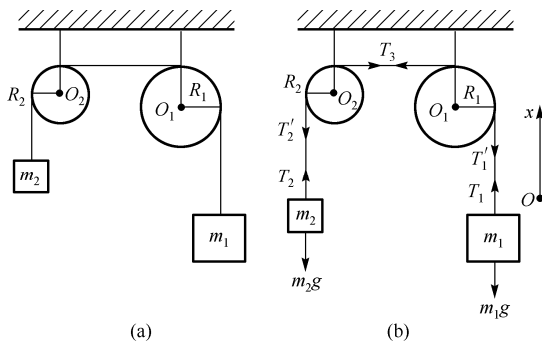


图 2.14 习题 2.10 图

分析: 在忽略轮轴摩擦, 考虑轻绳、绳与滑轮间没有相对运动的情况下, 对系统中各

物体进行受力分析,并用牛顿定律、转动定律写出物体的运动方程,再求解可得物体的加速度及绳中张力。

解: 对两个物体、两个定滑轮受力分析如图 2.14(b)所示,注意:题图中绳索拉力大小 $T_1 = T_1'$, $T_2 = T_2'$, m_1 、 m_2 的加速度大小为 a , 定滑轮 m_1' 、 m_2' 的角加速度分别为 a/R_1 、 a/R_2 。故对上述物体应用牛顿运动定律、转动定律。建立图中所示坐标系,假设 m_1 的加速度沿 x 轴正向,则有

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 (-a) \\ T_1 R_1 - T_3 R_1 = J_1 \left(-\frac{a}{R_1} \right) \\ T_2 R_2 - T_3 R_2 = J_2 \frac{a}{R_2} \end{cases}$$

式中 $J_1 = \frac{1}{2} m_1' R_1^2$, $J_2 = \frac{1}{2} m_2' R_2^2$, 联立上述 4 个方程,解得

$$a = \frac{2(m_2 - m_1)}{2(m_1 + m_2) + (m_1' + m_2')} g$$

$$T_1 = \frac{4m_1 m_2 + m_1(m_1' + m_2')}{2(m_1 + m_2) + (m_1' + m_2')} g$$

$$T_2 = \frac{4m_1 m_2 + m_2(m_1' + m_2')}{2(m_1 + m_2) + (m_1' + m_2')} g$$

$$T_3 = \frac{4m_1 m_2 + m_1 m_2' + m_2 m_1'}{2(m_1 + m_2) + (m_1' + m_2')} g$$

2.11 如图 2.15(a)所示,质量为 m_A 的物体 A 静止在光滑水平面上,与一质量不计的绳索相连接,绳索跨过一半径为 R 、质量为 m_C 的圆柱形滑轮 C,并系在另一质量为 m_B 的物体 B 上。滑轮与绳索间没有滑动,且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计。问:两物体的线加速度为多少?水平和竖直两段绳索的张力各为多少?(设绳子与滑轮无相对滑动,绳质量不计。)

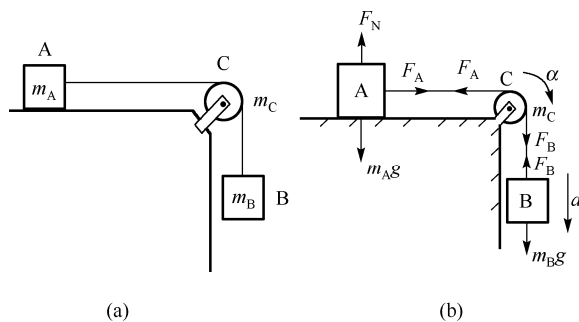


图 2.15 习题 2.11 图

分析: 将物体 A、B 隔离出来, 进行受力分析, 并分别画出受力图, 再由牛顿第二定律、转动定律列出方程求解。

解: 物体 A、B 和定滑轮的受力情况如图 2.15(b) 所示, 并在图中分别标示出物体 A、B 的加速度 a 及滑轮的角加速度 α , 按牛顿第二定律和转动定律列出 A、B 物体和定滑轮的运动方程。

$$\begin{cases} F_A = m_A a \\ m_B g - F_B = m_B a \\ F_B R - F_A R = J_C \alpha \end{cases}$$

式中, $J_C = \frac{1}{2} m_C R^2$, $\alpha = \frac{a}{R}$, 解上述方程组得

$$a = \frac{m_B g}{m_A + m_B + m_C/2}$$

$$F_A = \frac{m_A m_B g}{m_A + m_B + m_C/2}$$

$$F_B = \frac{(m_A + m_C/2) m_B g}{m_A + m_B + m_C/2}$$

2.12 如图 2.16(a) 所示, 质量都为 m , 半径分别为 r 和 $2r$ 的两个均匀圆盘, 同轴地粘在一起, 可以绕通过盘心且垂直于盘面的水平光滑固定轴转动, 对转轴的转动惯量为 $9mr^2/2$, 大小圆盘边缘都绕有绳子, 绳子下端都挂有一质量为 m 的重物。求盘的角加速度的大小。(绳子与圆盘间没有相对滑动。)

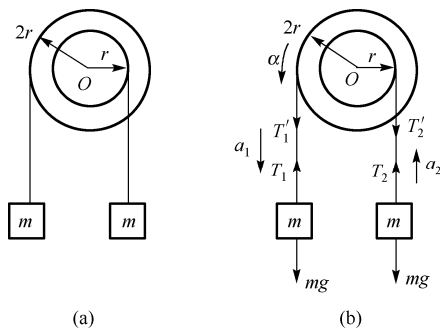


图 2.16 习题 2.12 图

分析: 将两物体、圆盘隔离出来, 进行受力分析, 并分别画出受力图, 再由牛顿第二定律、转动定律列出方程求解。

解: 将两物体、圆盘隔离出来, 进行受力分析, 如图 2.16(b) 所示, 并在图中标出了两物体的加速度 a_1 、 a_2 及圆盘的角加速度 α , 注意图中绳子拉力的大小 $T_1 = T_1'$, $T_2 = T_2'$ 。所以, 由牛顿第二定律得两物体运动方程为

$$mg - T_1 = ma_1$$

$$T_2 - mg = ma_2$$

对两转盘整体应用转动定律有

$$T_1 2r - T_2 r = J\alpha$$

上面三式中 $J = 9mr^2/2$, $a_1 = 2r\alpha$, $a_2 = r\alpha$, 再联立上述三个方程, 解得

$$\alpha = \frac{2g}{19r}$$

2.13 一蒸汽机的圆盘形飞轮质量为 200 kg , 半径为 1 m , 当飞轮转速为 $120 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 时关闭蒸汽阀门, 若飞轮在 5 min 内停下来, 求在此期间飞轮轴上的平均摩擦力矩及此力矩所做的功。

分析: 可利用角动量定理和动能定理分别求出平均摩擦力矩及此力矩所做的功。

解: 飞轮的转动惯量 $J = \frac{1}{2}mr^2 = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $\omega_0 = 120 \times 2\pi / 60$, $\omega_t = 0$, $\Delta t = 5 \times 60 = 300 \text{ s}$, 所以由角动量定理, 有

$$\bar{M}_f \Delta t = J\omega_t - J\omega_0$$

代入数据求得平均摩擦力矩, 为

$$\bar{M}_f = \frac{J\omega_t - J\omega_0}{\Delta t} = \frac{0 - 100 \times 2\pi / 60}{5 \times 60} = -4.19 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由动能定理, 可得此力矩所做的功, 为

$$A_f = E_{kt} - E_{k0} = \frac{1}{2}J\omega_t^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 = -\frac{1}{2}J\omega_0^2$$

代入数据则有

$$A_f = -\frac{1}{2} \times 100 \times (120 \times 2\pi / 60)^2 = -800\pi^2 = -7.9 \times 10^3 \text{ J}$$

2.14 如图 2.17 所示, 用一不可伸长的轻绳跨过定滑轮, 匀质滑轮质量为 m , 半径为 R , 绳两端各悬挂质量为 m_1 和 m_2 ($m_1 > m_2$) 的物体, 绳与滑轮无相对滑动, 求物体的加速度及绳两端的张力。

分析: 分别以定滑轮、两物体为研究对象, 并做受力分析, 然后应用运动牛顿运动定律、转动定律写出运动方程求解。

解: 对 m_1 和 m_2 应用牛顿运动定律分别有

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

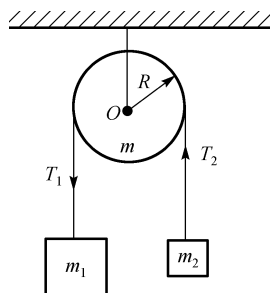


图 2.17 习题 2.14 图

对定滑轮, 由转动定律可得

$$(T_1 - T_2)R = J\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha$$

由于绳子不可伸长, 且没有相对滑动, 则

$$a_1 = a_2 = R\alpha$$

联立上述方程求解, 可得

$$a_1 = a_2 = \frac{2(m_1 - m_2)g}{m + 2(m_1 + m_2)}$$

$$T_1 = \frac{(m + 4m_2)m_1g}{m + 2(m_1 + m_2)}$$

$$T_2 = \frac{(m + 4m_1)m_2g}{m + 2(m_1 + m_2)}$$

2.15 在一水平放置的质量为 m 、长度为 l 的均匀细杆上, 套着一质量也为 m 的套管 (可看作质点), 套管用细线拉住, 它到竖直的光滑固定轴 OO' 的距离为 $\frac{1}{2}l$, 杆和套管所组成的系统以角速度 ω_0 绕 OO' 轴转动, 如图 2.18 所示。若在转动过程中细线被拉断, 套管将沿着杆滑动。在套管滑动过程中, 求该系统转动的角速度 ω 与套管轴的距离 x 的函数关系。(已知杆本身对 OO' 轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$ 。)

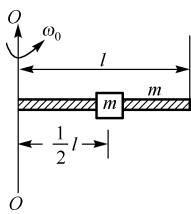


图 2.18 题 2.15 图

分析: 将细管和套管看作一个系统, 该系统从细绳断掉的瞬间开始, 对转轴 OO' 的合外力矩为零, 故系统角动量守恒。

解: 设系统初始时刻的角动量为 L_0 , 在任意时刻的角动量为 L 、套管距转轴的距离为 x , 则有

$$L_0 = \frac{1}{3}ml^2\omega_0 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\omega_0 = \frac{7}{12}ml^2\omega_0$$

$$L = \left[\frac{1}{3}ml^2 + mx^2 \right] \omega$$

由于系统对转轴 OO' 的合外力矩为零, 系统角动量守恒。所以由角动量守恒定律, 即有

$$L_0 = L$$

代入后解得系统转动的角速度 ω 与套管轴的距离 x 的函数关系

$$\omega = \frac{7}{12}l^2\omega_0 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{3}l^2 + x^2\right)} = \frac{7l^2\omega_0}{4l^2 + 12x^2}$$

2.16 一匀质细棒长为 $2a$ ，质量为 m ，以与棒长方向垂直的速度 v_0 在光滑水平面内平动时，与前方一固定的光滑支点 O 发生完全非弹性碰撞，碰撞点位于棒中心的一侧 $\frac{1}{2}a$ 处，如图 2.19 所示。求棒在碰撞后的瞬时绕点 O 转动的角速度 ω 。（细棒绕通过其端点且与其垂直的轴转动时的转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$ ，式中的 m 和 l 分别为棒的质量和长度。）

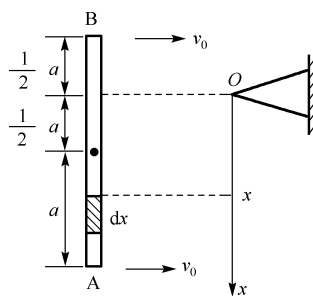


图 2.19 习题 2.16 图

分析：将细棒与光滑支点看作一个系统，碰撞前后，系统水平方向合外力为零，对点 O 的力矩为零，故系统角动量守恒。

解：设细棒与光滑支点为一个系统，在碰撞前后系统的角动量分别为 L_0 、 L ，且为

$$\begin{aligned} L_0 &= \int_0^{\frac{3}{2}a} v_0 l dm - \int_0^{\frac{1}{2}a} v_0 l dm = \int_0^{\frac{3}{2}a} \lambda v_0 l dl - \int_0^{\frac{1}{2}a} \lambda v_0 l dl \\ &= \lambda v_0 a^2 = \frac{m}{2} v_0 a \\ L &= J_C + m \left(\frac{1}{2}a \right)^2 = \left[\frac{1}{12} \times m \times (2a)^2 + m \times \left(\frac{1}{2}a \right)^2 \right] \omega \\ &= \frac{7}{12} m a^2 \omega \end{aligned}$$

因对点 O 的力矩为零，故系统角动量守恒，所以有

$$L_0 = L$$

解得

$$\omega = \frac{6v_0}{7a}$$

2.17 如图 2.20 所示，一质量均匀分布的圆盘，质量为 M ，半径为 R ，放在一粗糙水平面上，圆盘与水平面之间的摩擦系数为 μ ，圆盘可绕通过其中心 O 的竖直固定光滑轴转动。开始时，圆盘静止，一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 垂直于圆盘半径射入圆盘边缘并嵌在盘边上，求：（1）子弹击中圆盘后，圆盘所获得的角速度；（2）经过多少时间后，圆盘停止转动？

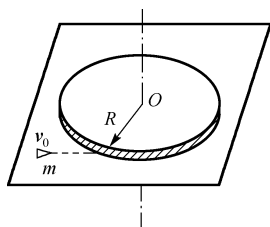


图 2.20 习题 2.17 图

分析：该题分两个过程。第一个过程是子弹射入圆盘，在这一过程中将子弹与圆盘视为一个系统，子弹射入圆盘前后瞬间，只有内力作用，系统所受外力矩为零，因此子弹射入前后系统的角动量守恒；第二个过程是，从子弹射入圆盘瞬间直到共同运动的子弹与圆盘一起静止下来的过程。在这个过程中，圆盘受到摩擦阻力矩作用一直到圆盘停止转动为止，根据角动量定理，摩擦阻力的冲量矩对时间的积累等于系统角动量的增量，从而求出转动时间。

解: 子弹射入前系统的角动量为 mv_0R , 子弹射入后的角动量为 $\left(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega$, 由角动量守恒得

$$mv_0R = \left(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega$$

解得

$$\omega = \frac{mv_0R}{mR^2 + \frac{1}{2}MR^2} = \frac{2mv_0}{(2m + M)R}$$

子弹进入圆盘后(设子弹质量均匀分布在圆盘上), 则圆盘所受的摩擦力矩为

$$\begin{aligned} M_{\text{摩擦力矩}} &= -\int_0^R \mu g r \left(\frac{M+m}{\pi R^2} 2\pi r dr \right) = -2\pi\mu g \frac{M+m}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \\ &= -\frac{2\pi\mu g}{3} \frac{M+m}{\pi R^2} R^3 = -\frac{2\mu g(M+m)R}{3} \end{aligned}$$

又由角动量定理

$$\int_0^t M_{\text{摩擦力矩}} dt = \int_0^t -\frac{2\mu g(M+m)R}{3} dt = 0 - mv_0R$$

积分后, 解得子弹射入后圆盘由转动到停止所用时间

$$\frac{2\mu g(M+m)R}{3} t = mv_0R, \quad \text{即 } t = \frac{3mv_0}{2\mu g(M+m)}$$

2.18 机器上的两飞轮 A 和 B, 通过摩擦接触后以相同的转速一起转动, 如图 2.21 所示。A 和 B 对轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B , 接触前的角速度分别为 ω_{A0} 和 ω_{B0} , 求接触后两轮的共同角速度 ω 及其方向。

分析: 以两轴为研究对象, 所受外力为轴力和重力, 对转轴的力矩都为零, 故对转轴的角动量守恒。

解: 根据角动量守恒定律,

$$J_A \omega_{A0} + J_B \omega_{B0} = (J_A + J_B) \omega$$

所以

$$\omega = \frac{J_A \omega_{A0} + J_B \omega_{B0}}{J_A + J_B}$$

可见, 当 ω_{A0} 和 ω_{B0} 同方向时, ω 与它们方向相同; 当 ω_{A0} 和 ω_{B0} 反向时, ω 的方向取决于角动量较大的那个轮的转动方向; 当 $\omega_{A0} = -J_B \omega_{B0} / J_A$ 时, $\omega = 0$ 。

2.19 如图 2.22 所示, 滑轮的转动惯量为 $J = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 半径 $r = 30 \text{ cm}$, 滑轮可绕光滑固定轴转动, 弹簧的劲度系数 $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$, 重物质量为 2.0 kg 。此滑轮-重物系统从静

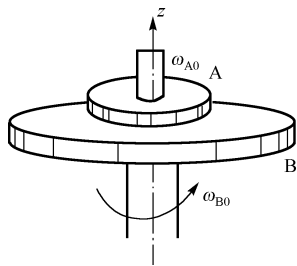


图 2.21 习题 2.18 图

止开始启动,开始时弹簧没有伸长,物体与斜面摩擦可以忽略,问物体能沿斜面下滑多远?

分析: 将滑轮-重物-弹簧视为一系统,则此系统只有重力和弹性力(保守力)做功,故系统机械能守恒。

解: 设物体能沿斜面下滑最远距离为 l , 静止开始启动时为初状态,物体沿斜面下滑最远处为末状态,令末状态时物体所在高度为 0 势能面,则物体的势能全部转换为弹簧的弹性势能,由于物体滑动过程中,滑轮从开始到静止不损耗能量,所以有

$$mgl \sin \theta = \frac{1}{2}kl^2$$

式中 $\sin 37^\circ = 0.602$, 代入上式, 即得物体能沿斜面下滑的距离

$$l = 1.18 \text{ m}$$

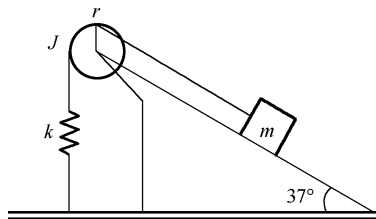


图 2.22 习题 2.19 图

(二) 流体部分

2.20 有一半径为 r 密度为 ρ 的空气泡, 测得气泡在密度为 ρ' 的液体中以速度 v 匀速上升, 可计算得出液体的黏滞系数 η 为 ()。

- A. $\eta = \frac{2}{9v}r^2(\rho - \rho')g$ B. $\eta = \frac{2}{9v}r^2(\rho' - \rho)g$
 C. $\eta = \frac{2}{9v}r^2(\rho' + \rho)g$ D. $\eta = -\frac{2}{9v}r^2(\rho' + \rho)g$

分析与解: 空气泡在液体中上升时, 同时要受到向下的重力 mg 和向下(与运动相反)的黏滞力 $f_{\text{黏滞力}}$, 及液体向上的浮力 $F_{\text{浮}}$, 其合力为 $F = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - 6\pi \eta v r$, 当合力竖直向上时, 气泡上升速度逐渐增大, 但阻力也随速度的增大而增加。当速度增加到一定程度时, 气泡所受合力为零, 则气泡将做匀速竖直向上的运动。即 $F = 0$ 时, 有

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - 6\pi \eta v r = 0$$

解得

$$\eta = \frac{2}{9v}r^2(\rho' - \rho)g$$

所以正确选项为 B。

2.21 将某种黏滞流体通过一段管半径为 r 的管道时流阻为 R_f , 如果仅将管半径增加一倍, 其流阻变为 ()。

- A. $\frac{R_f}{2}$ B. $\frac{R_f}{8}$ C. $\frac{R_f}{16}$ D. $8R_f$ E. $16R_f$

分析与解: 由泊肃叶定律可知, 流管中黏滞液体流动时, 流量与管两端液体压强 Δp 成

正比, 与管的流阻 R_f 成反比, 而 $R_f = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$, 故在其他条件不变的情况下, 管半径 r 增加一倍时, $R'_f = R_f / 16$ 。故正确选项为 C。

2.22 水在同一流管中稳定流动, 截面积为 0.5 cm^2 处的流速为 $12 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, 在流速为 $4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ 处的截面积为 ()。

- A. 0.167 cm^2 B. 1.5 cm^2 C. 0.056 cm^2 D. 4.50 cm^2 E. 以上都不对

分析与解: 利用流管中液体的平均速度及泊肃叶定律得到的黏性流体的连续性方程, 可得黏性流体的流量等于截面上的流体的平均速度与该截面积的乘积, 即 $Q = S\bar{v}$, 由此有 $S_1\bar{v}_1 = S_2\bar{v}_2$, 所以 $S_2 = S_1\bar{v}_1 / \bar{v}_2 = 0.5 \times 12 / 4 = 1.5 \text{ (cm}^2\text{)}$, 故正确选项为 B。

2.23 如图 2.23 所示, 某水平管, 箭头所示为理想流体的流动方向, S_1 为粗处的横截面积, S_2 、 S_3 为细处的横截面积, 且 $S_2 = S_3$ 。在 S_1 、 S_2 、 S_3 处接一内装一定质量水银的山形管, 若山形管上端液体的重量可忽略不计, 则山形管内水银面的高度 ()。

- A. 两细处水银面高于粗处 B. 粗处水银面高于两细处
C. 没有高度差 D. 沿水流方向逐渐降低 E. 沿水流方向逐渐升高

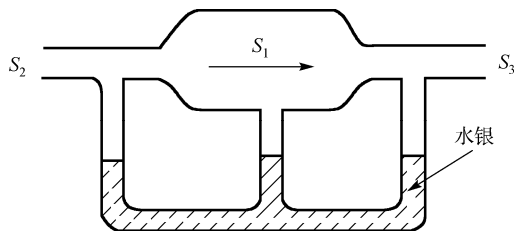


图 2.23 习题 2.23 图

分析与解: 利用伯努利方程可知, 若液体在一水平管中流动, 则有压强与速度的关系

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = c$$

若考虑水平流管中仅有一个入口和出口, 由 $Sv = c'$ 可知, 流体稳定流动时, 截面积大的地方流速小, 压强大; 截面积小的地方流速大, 压强小。所以, 在上述 S_1 、 S_2 、 S_3 处, S_2 、 S_3 处的压强小, 水银面高于 S_1 处的水银面, 故选项 A 正确。

2.24 血液从动脉管到毛细血管速度逐渐变慢的主要原因是 ()。

- A. 血液是黏滞流体 B. 血液是非牛顿流体 C. 毛细血管的总截面积比动脉管大
D. 毛细血管所在处的压强小 E. 毛细血管的直径太小

分析与解: 根据连续性原理, 在不同的截面积处, 总流量相同, 即总截面积小的地方, 流速大; 反之流速小, 因此人体血液循环过程中, 毛细血管处流速为 $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$, 流速最慢; 其次为静脉血管的流速为 $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, 流速最大的地方为动脉血管, 为 $30 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ 。故正确选项为 C。

2.25 如图 2.24 所示, 黏滞液体经 A 管流入后, 流过两等长的 B、C 支管, 再从 D 管流出。已知 A、B、C、D 管的截面积分别为 20 cm^2 、 10 cm^2 、 5 cm^2 、 30 cm^2 , 若 A 管中的液体的平均流速为 $0.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 则 B、C、D 管的平均流速分别为 ()。

- A. $0.40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $0.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $0.167 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 B. $0.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $0.50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $0.167 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 C. $0.40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $0.20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $0.37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 D. $0.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $0.50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $0.375 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

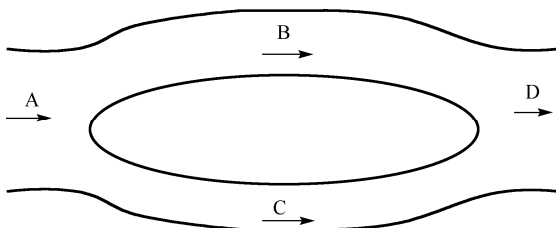


图 2.24 习题 2.25 图

分析与解：根据连续性原理，在不同的截面积处，总流量相同。即

$$S_A \bar{v}_A = S_B \bar{v}_B + S_C \bar{v}_C = S_D \bar{v}_D$$

取式 $S_A v_A = S_D v_D$ 得 $v_D = 0.167 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ；而流速与横截面积成反比，因 $S_B = 2S_C$ ，所以 $v_B = \frac{1}{2} v_C$ ，代入上面等式，得 $v_C = 0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ， $v_B = 0.25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。所以正确选项为 B。

2.26 水在粗细均匀的虹吸管中流动时，如图 2.25 所示 4 个点的压强关系是（ ）。

- A. $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ B. $P_1 > P_2 = P_3 = P_4$
 C. $P_1 = P_4 > P_3 = P_2$ D. $P_1 > P_2 > P_3 > P_4$

分析与解：虹吸是利用液面高度差的作用力现象。其实质是因为液体压强和大气压强而产生。题图中 $P_1 = P_4$ 都为大气压强；对于 2、3 两点，由于在同一水平面上，所以液体柱高度产生的压强相等，即 $P_2 = P_3$ ；根据帕斯卡定律 $P = \rho gh$ ，在 2 点处液体柱产生的压强 $P_2 = \rho gh_2$ 小于 4 点处液体柱产生的压强 $P_4 = \rho gh_4$ ，故在题图中 1、2、3、4 点压强关系为 $P_1 = P_4 > P_3 = P_2$ ，亦即此题正确选项为 C。

2.27 图 2.26 所示为皮托管测流速，如果流管中是理想液体，

(1) 当液体不流动时，皮托管中水银面的高度差为（ ）。

- A. $h_1 - h_2 > 0$ B. $h_1 - h_2 = 0$ C. $h_1 - h_2 < 0$ D. 不能确定

(2) 液体匀速度向右流动，皮托管中水银面的高度差为（ ）。

- A. $h_1 - h_2 > 0$ B. $h_1 - h_2 = 0$ C. $h_1 - h_2 < 0$ D. 不能确定

分析与解：(1) 当液体不流动时，静止液体的压强只与深度有关，因此同一水平面上的各点压强相等，故 $h_1 - h_2 = 0$ ；(2) 当液体均匀流动时，在题图中右管 A 处形成流速为零的滞止区，使开口处流速为零 $v_A = 0$ 。而在题图左管的 B 处流速与流线平行，故它对流体的流动无影响，即开口处的流速就是待测液体的流速，则由伯努利方程得

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

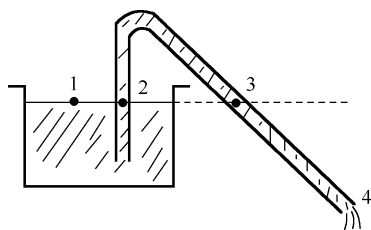


图 2.25 习题 2.26 图

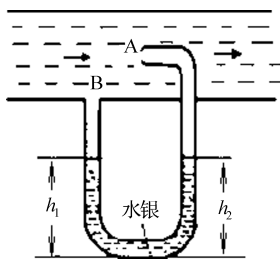


图 2.26 习题 2.27 图

因为 $v_A = 0$, $v_B = v$, 所以有

$$p_A - p_B = \rho g(h_1 - h_2) > 0$$

即皮托管中水银面的高度差 $h_1 - h_2 > 0$, 所以, 该题中 (1) 的正确选项为 B; (2) 的正确选项为 A。

2.28 在直径为 $2 \times 10^{-2} \text{ m}$ 的动脉管中血液的平均流速为 $0.35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 若已知血液的密度 $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 黏滞系数为 $\eta = 4.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。那么血液在血管中的流动是 ()。

A. 层流、湍流同时存在 B. 层流 C. 湍流 D. 层流、湍流不能确定

分析与解: 由雷诺数判断动脉血管中血液流动的状态。已知动脉的内半径 $r = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$, 血液平均流速 $\bar{v} = 0.35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 血液的密度 $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 黏滞系数为 $\eta = 4.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, 所以由雷诺数公式可得

$$\text{Re} = \frac{\rho \bar{v} r}{\eta} = \frac{1.05 \times 10^3 \times 0.35 \times 1 \times 10^{-2}}{4.0 \times 10^{-3}} = 918 < 1000$$

所以, 该段主动脉中的血液为层流。故此题的正确选项为 B。

2.29 一个顶部开口的大容器, 现有一横截面积为 $1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 的小孔在底部中心, 当水从圆形容器顶部以 $100.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ 的流量注入时, 则容器中水面的最大高度为多少? ($g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 。)

分析: 首先求出水从小孔流出的流速, 再求出小孔的流量。当小孔流出的流体的流量等于从圆形容器顶部注入的流量时, 容器的水面达到最大高度。

解: 设小孔的横截面积为 $S_{\text{孔}} = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, 注入的流量 $Q = 100.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ 。水从小孔流出的流速为

$$v_{\text{孔}} = \sqrt{2gh}$$

当小孔流出的流体的流量等于从圆形容器顶部注入的流量时, 即 $Q = S_{\text{孔}} \cdot v_{\text{孔}}$, 将上式及数据代入, 有

$$h = \frac{(Q / S_{\text{孔}})^2}{2g} = \frac{(100 \times 10^{-6} / 1.0 \times 10^{-4})^2}{2 \times 10} = 0.05 \text{ m}$$

则得容器中水面的最大高度为 0.05 m 。

2.30 红细胞的密度为 $1.09 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 可近似看成是半径为 $2.0 \times 10^{-6} \text{ m}$ 的小球。设

37℃时的血浆的黏度为 $1.2 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ，密度为 $1.04 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。求红细胞在血浆中自然沉降1.0 cm所需要的时间。在加速度为 $10^5 g$ 的离心机的离心管中，沉降同样的距离需要多少时间？

分析：红细胞在血浆中运动时受黏滞力，由于黏滞力与红细胞运动速度有关，但当红细胞运动速度达到一定值时，所受的黏滞力、重力和浮力三个力平衡，这时红细胞以此刻的速度做匀速运动。由此，可求红细胞沉降的平均速度，然后估算出红细胞沉降1.0 cm时所需时间；若在加速度为 $10^5 g$ 的离心机的离心管中，此时可将加速度 g 用 $10^5 g$ 替换，再计算即可。

解：设红细胞的密度 $\rho_1 = 1.09 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ，血浆的密度 $\rho_2 = 1.04 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ，则红细胞所受的重力和浮力的合力为

$$f = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_1 g - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_2 g = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_1 - \rho_2) g$$

当红细胞做匀速运动时，黏滞力 $f_{\text{黏滞力}} = -6\pi\eta Rv$ 等于重力和浮力 f 的合力，所以有

$$6\pi\eta Rv = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_1 - \rho_2) g \quad (1)$$

整理上式，代入数据，有

$$v = \frac{2R^2(\rho_1 - \rho_2)g}{9\eta} = \frac{2 \times (2.0 \times 10^{-6})^2 \times 9.8}{9 \times 1.2 \times 10^{-3}} = 0.36 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

则红细胞在血浆中自然沉降1.0 cm所需要的时间

$$t = \frac{l}{v} = \frac{1.0 \times 10^{-2}}{0.36 \times 10^{-6}} = 2.78 \times 10^4 \text{ s}$$

加速度为 $10^5 g$ 的离心机的离心管中，此时可将式①中的加速度 g 用 $10^5 g$ 替换，则这时红细胞的速度为

$$\bar{v}' = 0.36 \times 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

所以

$$t' = \frac{l}{\bar{v}'} = \frac{1.0 \times 10^{-2}}{0.36 \times 10^{-1}} = 2.78 \times 10^{-1} \text{ s}$$

2.31 求血液流过一段长1.0 mm，直径为4.0 μm的毛细血管的血压降与这段毛细血管的流阻。（毛细血管中血液的平均流速为 $0.66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，血液的黏度取 $4.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。）

分析：由泊肃叶定律，同时考虑流体单位体积的能量损失，则可求得血液在血管中流过一段距离的血压降，再应用流阻公式求得流阻。

解：如果流体在水平均匀细管中流动，且 $h_1 = h_2$ ， $v_1 = v_2$ ，则黏性流体在水平圆管中做稳定流动时，单位体积流体的能量损失为 $\Delta E = \frac{pS\Delta x}{V} = P_1 - P_2$ 。又由泊肃叶定律即有

$$Q = \pi R^2 v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (p_1 - p_2) = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta E$$

于是有

$$p_1 - p_2 = \frac{8\eta L}{R^2} v = \frac{8 \times 4.0 \times 10^{-3} \times 1.0 \times 10^{-3}}{(2.0 \times 10^{-6})^2} \times 0.66 = 5.28 \times 10^6 \text{ Pa}$$

这段毛细血管的流阻

$$R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \frac{8 \times 4.0 \times 10^{-3} \times 1.0 \times 10^{-3}}{3.14 \times (2.0 \times 10^{-6})^4} = 6.37 \times 10^{17} \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$$

2.32 皮下注射时, 若针头内径减小一半, 则手指的推力要增大到原来的多少倍才能取得注射相同流量的效果?

分析: 由泊肃叶定律, 考虑针头半径减小后, 相同流量时, 压力差的变化。

解: 设针头半径为 R , 压力差为 Δp , 则由泊肃叶定律, 有

$$Q = \frac{\pi R_1^4}{8\eta L} \Delta p_1 = \frac{\pi R_2^4}{8\eta L} \Delta p_2$$

故有

$$\Delta p_2 = \frac{R_1^4}{R_2^4} \Delta p_1 = \frac{R_1^4}{(R_1/2)^4} \Delta p_1 = 16\Delta p_1$$

即若针头内径减小一半, 手指的推力要增大到原来的 16 倍, 能取得注射相同流量的效果。

2.33 某人的心输出量为 $0.85 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, 体循环的总压强差为 11.8 kPa, 此人的循环总流阻为多少?

分析: 由泊肃叶定律和流阻公式可直接计算此人的循环总流阻

解: 某人的心输出量 $Q = 0.85 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, 压强差为 $p_1 - p_2 = 11.8 \text{ kPa}$ 。则由泊肃叶

定律 $Q = \pi R^2 v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (p_1 - p_2)$ 和流阻公式 $R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$, 有

$$R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{11.8 \times 10^3}{0.85 \times 10^{-4}} = 1.39 \times 10^8 \text{ (Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3})$$

此人的循环总流阻为 $1.39 \times 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ 。

第3章 气体动理论 热力学基础

物质的运动形式是多种多样的，在力学中已经研究了物质的简单运动形式，并用牛顿经典理论给出了具体的描述方法。本章研究物质的热运动，热现象在自然界中十分普遍，它是大量微观粒子（分子、原子等）做不规则热运动的宏观表现。要认识热的本质，必须研究分子的微观运动，气体动理论正是从物质的微观结构出发，以假定的气体分子模型（理想气体）为对象，在对每个分子运用力学原理的基础上，对大量分子运动运用概率统计方法，从而找出大量分子热运动的宏观性质以及所遵循的统计规律，揭示宏观热现象及其规律的微观本质。

热力学采用的方法与上面气体动理论截然不同。在热力学中，并不涉及物质的微观结构，只是以观察和实验事实为依据，从能量的观点出发，分析研究热力学系统状态变化中有关热功转换的关系和条件。现实生活中，凡涉及能量转换方案和能量利用率的问题都可用热力学方法研究。热力学的理论基础是热力学第一定律与热力学第二定律。热力学第一定律是研究包括热现象在内的能量转换与守恒定律，热力学第二定律则是指明过程进行的方向和条件的另一基本定律。人们发现，实际的热力学过程都有明显的单方向性，都是不可逆过程。但从理想的可逆过程入手引入熵的概念以后，就可从熵变来说明实际过程的不可逆性。因此，在热力学中熵是一个十分重要的概念。如今，熵的理论已经广泛应用于自然科学和社会科学等许多领域。

3.1 学习要求

1. 气体状态方程 内能

(1) 了解状态参量、平衡态的概念及分类，热力学第零定律的意义；理解理想气体状态方程的意义并能用它解决有关气体状态方程问题。

(2) 理解准静态过程、体积功、热量、内能等概念，并掌握其计算。

2. 热力学第一定律

(1) 掌握热力学第一定律的意义，并能利用它对理想气体各过程进行分析和计算；理解热容量的概念，能直接计算理想气体各过程的热量传递。

(2) 理解循环过程、卡诺循环、热机效率和致冷系数的概念；掌握卡诺循环的特征，掌握卡诺正循环效率及卡诺逆循环制冷系数的计算。

3. 热力学第二定律

(1) 了解实际宏观过程的不可逆性的意义；理解热力学概率的意义及它和实际过程进行方向的关系。

(2) 掌握理想气体的微观模型和统计假设, 掌握理想气体压强和温度公式; 理解理想气体宏观量压强和温度的统计意义。

(3) 理解自由度概念, 理解能量均分定理的意义, 并能由它导出理想气体内能公式。理解理想气体摩尔热容量的概念, 会计算摩尔定容热容和摩尔定压热容。

(4) 掌握熵增加原理是热力学第二定律的数学表达式的深刻内涵; 了解可逆过程的概念, 能计算简单问题的熵变。

4. 麦克斯韦 玻尔兹曼分布率

(1) 理解速率分布函数及其麦克斯韦速率分布律的意义, 会计算分子的平均速率、最概然速率和方均根速率。

(2) 了解气体分子热运动频繁碰撞的物理机制, 理解平均自由程、平均碰撞频率的概念。

(3) 了解玻尔兹曼能量分布律的意义和粒子在重力场中按高度分布的公式。

5. 输运现象

了解气体三种输运过程: 黏滞现象、热传导现象、扩散现象及输运过程的物理本质及其宏观规律和微观定性解释。

3.2 内容提要

1. 基本概念

(1) 气体动理论的基本观点: 自然界一切物体都是由大量分子或原子构成; 分子间存在相互作用力; 构成物质的分子或原子处于永恒的杂乱无章的运动之中。

(2) 状态参量: 为了描述系统的状态, 人们采用一些物理量来表示系统的有关特性, 譬如: 体积、温度、压强、浓度等。这些描述状态的变量, 称为状态参量。对状态参量又常按几何参量、力学参量、化学参量和电磁参量等分类。对于一定质量的气体, 它的状态一般可用压强 p 、体积 V 和温度 T 三个量来表征, 这三个量称为气体的状态参量。

(3) 平衡态: 在不受外界影响的条件下, 热力学系统的所有宏观物理性质不随时间变化而变化的状态。或者说: 在不受外界影响的条件下, 系统宏观性质均匀一致、不随时间变化的状态称为平衡态。

满足平衡态的条件是: ①系统与外界在宏观上无能量和物质的交换; ②系统的宏观性质不随时间改变。

(4) 热力学第零定律: 如果 $T_A = T_B$ 、 $T_B = T_C$, 那么 $T_A = T_C$ (传递性规律)。即热力学系统 A、B 与 C 同时处于平衡态, 那么 A 与 B 也处于平衡态。

(5) 理想气体: 严格遵守四条实验定律 (玻意耳定律、盖-吕萨克定律、查理定律和阿伏伽德罗定律) 的气体, 称为理想气体。

① 理想气体是一种理想模型, 它反映气体的共性。

② 实验事实表明, 在通常情况下, 各种实际气体都可近似看作是理想气体。

③ 理想气体的状态方程:

$$pV = NkT = \frac{m}{M_{\text{mol}}} RT = \gamma RT \quad (3-1a)$$

$$p = nkT \quad (3-1b)$$

式中, N 是气体分子数, k 是玻尔兹曼常数, γ 是物质的量, R 是气体普适常数, m 是气体质量, M_{mol} 是摩尔质量, n 是气体分子数密度。

(6) 热力学过程的相关概念

① 热力学过程: 系统从一个平衡态转化到另一个平衡态所经历的变化过程, 称为热力学过程。

② 弛豫时间: 系统从一个平衡态转化到另一个平衡态所需要的时间。

③ 准静态过程: 系统从一个平衡态转化到另一个平衡态所经历的过程是无限缓慢的, 以致使系统所经历的每个中间状态都可近似看成是平衡态, 那么系统的这个状态变化过程称为准静态过程。

④ 非静态过程: 系统从一个平衡态转化到另一个平衡态所经历的中间状态是非平衡态, 那么这个过程称为非静态过程。

说明: a) 准静态过程为理想过程; b) 一个热力学过程为准静态过程的必要条件为两个平衡态转化所经历的时间大于弛豫时间; c) 准静态过程可以用宏观参量图(状态图)表示, 如气体的准静态过程在 $p-V$ 图上可用一条曲线表示。

(7) 功、热量和内能

在热力学中功的概念非常广, 如: 气体非常缓慢膨胀过程中, 可视该气体系统为一准静态过程, 在此过程中, 气体所做的功为

$$dA = p(Sdl) = pdV \quad (3-2a)$$

式中, dV 是气体体积的微小增量, p 为气体压强。对一有限变化过程, 气体的功为

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(Sdl) = \int_{V_1}^{V_2} pdV \quad (3-2b)$$

它在数值上等于 $p-V$ 图上过程曲线下的面积, 如图 3.1 所示。

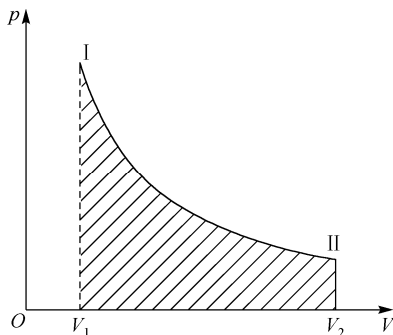


图 3.1 气体膨胀时所做的功

传热过程中所传递的能量的多少称为热量, 通常以 Q 表示。当一定量的气体温度发生变化时, 它吸收的热量为

$$Q = \gamma C_v \Delta T \quad (3-3)$$

式中, C_v 为摩尔热容量, γ 为摩尔数 (物质的量), 也常称 γC_v 为系统的热容。

内能是系统状态的单值函数。从气体动理论的观点来说, 它是热力学系统内部, 所有的分子热运动的能量及分子与分子间相互作用的势能总和。一定质量的气体的内能为温度和体积的函数, 即 $E = E(T, V)$, 对理想气体而言, 内能仅是温度的函数, 即 $E = E(T)$, 物质的量为 γ 的理想气体的内能为

$$E = \frac{m}{M_{\text{mol}}} \frac{i}{2} RT \quad (3-4)$$

式中, i 为分子自由度。注意: 内能为状态的单值函数, 热量和功为过程函数。

2. 热容量、摩尔热容量

热容量: 热力学系统在状态变化过程中温度升高 1 K 所吸收的热量, 表示为

$$C = \frac{dQ}{dT} \quad (3-5)$$

摩尔热容量: 1 mol 的物质在状态变化过程中温度升高 1 K 所吸收的热量。

理想气体的定容摩尔热容量 $C_{V,m}$ 是 1 mol 的理想气体在等体过程中, 温度升高 1 K 所吸收的热量, 即

$$C_{V,m} = \frac{dQ_V}{dT} \quad (3-6)$$

理想气体的定压摩尔热容量 $C_{p,m}$ 是 1 mol 理想气体在等压过程中, 温度升高 1 K 所吸收的热量, 即

$$C_{p,m} = \frac{dQ_p}{dT} \quad (3-7)$$

$C_{V,m}$ 和 $C_{p,m}$ 的值一般由实验测得, 应用时可查实验手册。理想气体的 $C_{V,m}$ 和 $C_{p,m}$ 的理论值与它们的自由度有关, 为

$$C_{V,m} = \frac{dQ_V}{dT} = \frac{i}{2} R \quad (3-8)$$

$$C_{p,m} = \frac{dQ_p}{dT} = \frac{i}{2} R + R = C_{V,m} + R \quad (3-9)$$

可见, $C_{p,m}$ 与 $C_{V,m}$ 之差为

$$C_{p,m} - C_{V,m} = R \quad (3-10)$$

式 (3-10) 称为迈耶 (J.R.Meyer) 公式, 它的意义是, 1 mol 的理想气体温度升高 1 K 时, 在等压过程中比等体过程要多吸收 8.31 J 热量。

摩尔定压热容 $C_{p,m}$ 与摩尔定容热容 $C_{V,m}$ 之比, 用 γ 表示, 称为 (摩尔) 热容比 (绝热系数)

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \frac{i+2}{i} \quad (3-11)$$

3. 分子热运动和统计规律

(1) 统计规律性：在分子热运动中，个别分子的运动（在动力学支配下）是无规则的，存在着极大的偶然性。但是，总体上却存在着确定的规律性（如理想气体的压强）。人们把这种支配大量粒子综合性质和集体行为的规律性称为统计规律性。

(2) 理想气体的压强公式

根据理想气体的力学假设和统计假设可以推导出理想气体的压强公式，该公式的推导有助于理解气体动理论的任务和研究方法。

理想气体压强公式

$$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2} = \frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_k} \quad (3-12)$$

式中， $\left(\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}\right)$ 为分子平均平动动能。式 (3-12) 给出了三个统计平均量 p 、 n 和 $\overline{\varepsilon_k}$ 之间的关系，这是统计规律，而不是力学规律。如果说个别分子产生多大压强，这是无意义的。

(3) 温度的统计解释

由气体压强公式的结论，结合理想气体状态方程 ($p = nkT$) 可以揭示温度的微观本质，即气体的温度是气体分子平均平动动能的量度。气体分子的平均平动动能与温度的关系为

$$\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT \quad (3-13)$$

式 (3-13) 也称为能量公式，它表示宏观量温度 T 和微观量的平均值 $\overline{\varepsilon_k}$ 之间的关系。温度从宏观上说是表征气体处于热平衡状态的物理量；从微观角度讲，温度 T 是气体分子平均平动动能的量度。它表征大量分子热运动的激烈程度，是大量分子热运动的统计平均结果，是一个统计量，温度对个别分子来说是没有意义的。

(4) 能量按自由度均分定理、理想气体的内能

在等概率原理的基础上去理解能量均分定理。气体分子任一自由度的平均动能都等于 $\frac{1}{2}kT$ ，如果气体分子有 i 个自由度，则每个分子总平均动能为 $\frac{i}{2}kT$ 。能量按这样的原则分配，称为能量均分定理。

通常气体分子的总平均动能为

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2}(t+r+2s)kT \quad (3-14)$$

式中， t 、 r 、 s 分别表示分子的平动、转动及分子间振动自由度。1 mol 理想气体的内能为

$$E_{\text{mol}} = \frac{i}{2} RT \quad (3-15)$$

质量为 m (摩尔质量为 M) 的理想气体的内能是

$$E = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} RT \quad (3-16)$$

4. 麦克斯韦速率分布规律

(1) 速率分布函数

设 N 为一定质量气体的总分子数, 气体分子的速率 v 可以连续取零到无限大之间的任何数值, 可以按速率的大小将速率分为若干个区间, 在任意区间 (如: $v \sim v + dv$) 的分子数为 dN_v , 则 dN_v / N 表示在速率 $v \sim v + dv$ 区间内分子数占总分子数的百分比, 或者说分子处于该速率区间内的概率, 当然这个百分比在任一区间内是不相同的, 但比值 dN_v / N 与速率间隔的大小 dv 成正比, 即有

$$\frac{dN_v}{N} = f(v)dv \quad (3-17)$$

式中, $f(v)$ 称为速率分布函数, 表示为

$$f(v) = \frac{dN_v}{N} \cdot \frac{1}{dv} \quad (3-18)$$

式 (3-18) 的物理意义是: 气体分子在速率 v 附近, 处于单位速率间隔内的概率; 或者说, 气体分子在速率 v 附近单位速率间隔内的分子数占分子总数的百分比, 也称为概率密度。由式 (3-18) 对所有速率区间积分, 得到分布在所有速率区间的分子数占总分子数百分比的总和, 显然为 1, 即

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1 \quad (3-19)$$

式 (3-19) 的意义是: 在分子速率能够取值的整个速率区间内找到某个分子的概率是 100%, 所有分布函数都满足这个条件, 称为分布函数的归一化条件。

理想气体在不同温度下的速率分布曲线如图 3.2 所示, 由图可见, 具有很大或很小速率的分子数很少; 温度升高, 曲线的峰值右移, 即分子平均速率增大 (系统的平均平动动能增大)。

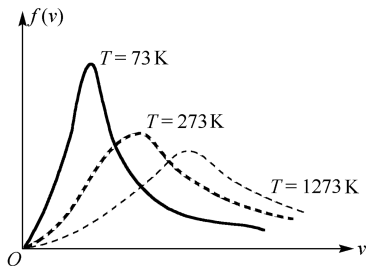


图 3.2 不同温度下理想气体的速率分布曲线

(2) 麦克斯韦速率分布函数

麦克斯韦 (J.C.Maxwell) 从理论上导出了理想气体在平衡态下的速率分布函数, 形式为

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \quad (3-20)$$

(3) 用麦克斯韦速率分布函数求三种统计速率

① 最概然速率 v_p

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{\text{mol}}}} = 1.414 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} \quad (3-21)$$

② 平均速率 \bar{v}

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\text{mol}}}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} \quad (3-22)$$

③ 方均根速率 $\sqrt{v^2}$

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{mol}}}} \approx 1.732 \sqrt{\frac{RT}{M_{\text{mol}}}} \quad (3-23)$$

* (4) 玻尔兹曼 (L.Boltzmann) 分布规律

麦克斯韦速率分布函数是对理想气体而言的, 玻尔兹曼把它推广到气体分子任一力场中运动的情况, 这种分布与麦克斯韦速率分布不同的是指数项中的能量 (即考虑总能量 $E = E_k + E_p$) 除了动能以外, 还考虑了分子在力场中的势能, 且势能随位置而定。在考虑总能量情形下的分布结果称为玻尔兹曼分布。玻尔兹曼分布是个重要的规律, 它对实物微粒在不同力场中运动的情形都是正确的。目前对于微观世界的现象, 虽然必须用量子理论才能解释, 但经典统计可以看成是量子理论的极限近似, 在很多情况下还是与实际近似相符的。如: 在分析半导体中载流子按能量分布问题时, 一般情况下仍可采用经典统计结果。

5. 分子碰撞和平均自由程

在室温下气体分子的平均速率约每秒几百米, 但由于分子在运动过程中不断与其他分子碰撞而改变其运动方向, 因而实际上分子的热运动是比较缓慢的。事实上, 诸如气体的扩散、热传导等过程进行的快慢都取决分子相互碰撞的频繁程度。为了描述分子热运动的统计规律, 人们引入分子的平均碰撞次数及平均自由程的概念。

(1) 平均自由程: 两刚性分子每两次连续碰撞中一个分子自由运动的平均路程, 数学公式为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} \quad (3-24)$$

式中, d 为分子直径, n 为分子数密度。

(2) 平均碰撞频率 \bar{Z} : 单位时间内一个刚性气体分子与其他分子碰撞的平均次数。设

除一个分子外其他分子都静止不动, 只有其中一个分子以平均相对速率 \bar{v}_r 运动, 且单位体积内的分子数为 n , 则所求运动分子在 1s 内与其他分子碰撞的平均碰撞频率 \bar{Z} 为

$$\bar{Z} = \pi d^2 \bar{v}_r n$$

利用麦克斯韦速率分布可求出, 平均相对速率 \bar{v}_r 与算术平均速率的关系为 $\bar{v}_r = \sqrt{2}\bar{v}$, 所以平均碰撞频率的数学形式为

$$\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} n \quad (3-25)$$

平均碰撞频率 \bar{Z} 与平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的关系为 $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}}$ 。

平均自由程和平均碰撞频率是气体动理论中的重要概念之一, 借助于它, 人们可以不用速率分布函数, 而对气体中的某些热现象作出相当简单而又成功的论证。

*6. 输运现象

当气体处于接近平衡态的非平衡态时, 由于气体分子不断地碰撞和相互搀和, 分子间将不断地交换动量和能量, 使系统内的某些微观量从一处迁移到另一处, 从而使气体内部原来存在的宏观量的不均匀趋向于均匀, 这种现象称为气体内部的迁移现象, 也称输运现象。气体的输运现象有三种, 黏滞现象、热传导现象和扩散现象。三种输运现象从宏观上看, 都是由于气体内某些宏观量分布不均匀引起的。系统内的不均匀性程度可用梯度表示, 输运的量都与梯度成正比, 输运的结果总是企图逐步消除不均匀性, 使气体由不平衡态逐步趋向平衡态; 从微观上看, 输运现象是由分子热运动引起的, 分子间不断碰撞, 相互搀和使某种分子逐步由不均匀趋向于均匀。但是三种输运现象的原因、输运的量及输运的规律却不完全相同。具体有如下分类:

(1) 黏滞现象: 流动气体中各气层的流速不相等, 在两个相邻气层之间的接触面上, 将形成阻碍气层相对运动的摩擦力, 这个力称为黏性力, 这个现象称为黏滞现象。在黏滞现象中, 不同气层中出现定向运动动量的迁移。

(2) 热传导现象: 气体内各部分的温度不同, 从温度较高处向温度较低处, 将有热量传递, 这一现象称为热传导现象。在热传导现象中, 不同气层中出现定向能量的迁移。

(3) 扩散现象: 同一种气体在容器中各部分密度不同, 或容器中存在不同种类的气体, 经过一段时间后, 容器中各部分的成分以及气体的密度趋于均匀一致的现象称为扩散现象。在扩散现象中, 不同气层中出现定向质量的迁移。

对于上述三种现象, 在气体动理论中, 利用分子碰撞的平均自由程概念, 可以认为是气体分子在通过分界面 dS 前的最后一次碰撞; 或平均地说, 分子将发生在距离该分界面为 $\bar{\lambda}$ 处的物理性质, 将一侧的动量、能量、质量带到了分界面的另一侧。通过 dS 两侧物理量在交换上的差异, 就可计算出转移的相关物理量值, 从而求出黏滞系数 η 、热传导系数 K 、扩散系数 D :

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \quad (3-26)$$

$$K = \frac{1}{3} \frac{C_V}{\mu} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \quad (3-27)$$

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \quad (3-28)$$

7. 热力学第一定律

大量实验表明：对一确定的系统，外界对它传递热量为 Q ，系统从内能为 E_1 初始平衡态变化到内能 E_2 的终末平衡态，同时系统对外做功为 A ，那么，不论过程如何，总有

$$Q = \Delta E + A \quad (3-29a)$$

式 (3-29a) 称为热力学第一定律，式中， $Q > 0$ 表示系统吸收热量； $Q < 0$ ，表示系统放出热量； $\Delta E (= E_2 - E_1) > 0$ 表示系统内能增加， $\Delta E < 0$ 表示系统内能减少； $A > 0$ 表示系统对外做功， $A < 0$ 表示外界对系统做功。

热力学第一定律的意义是：系统状态发生改变时，外界对系统传递热量，一部分使系统内能增加，另一部分供系统对外做功。热力学第一定律实际上是包括热量在内的能量守恒定律。对微小变化过程，热力学第一定律的形式为

$$dQ = \Delta E + dA \quad (3-29b)$$

说明：①热力学第一定律是引入态函数（内能）的理论基础；②热力学第一定律表明：第一类永动机是不可实现的。

8. 典型的热力学过程

把热力学第一定律应用到理想气体的几个准静态过程中，得到各过程的主要公式（见表 3-1）。

表 3-1 理想气体热力学过程的主要公式

过程	特征	过程方程	吸收热量	对外做功 A	内能增量
等体	$V = \text{常量}$	$\frac{p}{T} = \text{常量}$	$\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$	0	$\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$
等压	$p = \text{常量}$	$\frac{V}{T} = \text{常量}$	$\frac{m}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1)$	$p(V_2 - V_1)$ 或 $\frac{m}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1)$	$\frac{m}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1)$
等温	$T = \text{常量}$	$pV = \text{常量}$	$\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ 或 $\frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	$\frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ 或 $\frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}$	0
绝热	$dQ = 0$	$pV^\gamma = \text{常量}$ $V^{\gamma-1}T = \text{常量}$ $p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = \text{常量}$	0	$-\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$ 或 $\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1}$	$\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$
*多方		$pV^n = \text{常量}$	$A + \Delta E$	$\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n - 1}$	$\frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$

说明：

① 等容过程中，系统吸收的热量完全用来增加热力学系统的内能。

② 等温过程中吸收的热量完全用来对外做功, 而不用来增加热力学系统的内能。

③ 同一初始状态气体的绝热过程与等温过程相比, 在变化相同体积时, 压强下降更快, 如图 3.3 所示。其原因是在绝热过程对外做功中, 依靠的是系统内能的减小, 而压强减小是由于气体动量减小和气体密度的减小; 等温过程对外做功中, 气体分子的动量依靠从外吸收热量保持不变, 压强减小的原因仅由于气体分子密度的减小。

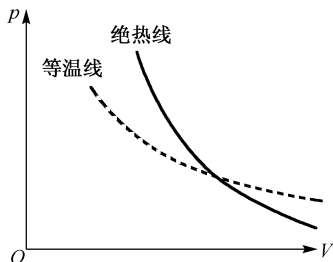


图 3.3 等温线与绝热线比较

9. 循环过程、卡诺循环

(1) 循环过程: 如果系统由某一状态出发, 经过任意的一系列过程, 最后又回到原来的状态, 这样的过程称为循环过程。

特点: 由准静态过程组成的循环过程, 在 $p-V$ 图上可表示为一条闭合曲线; 系统经历一个循环过程后, 内能变化 $\Delta E = 0$ 。

工作物质做正循环的机器称为热机。热机工作时从高温热源吸热 Q_1 , 对外做功为 A (净功), 同时向低温热源放热 Q_2 。热机的效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (3-30)$$

热机对外所做的功, 在数值上等于 $p-V$ 图上闭合曲线所包围的面积。

工作物质做逆循环的机器称为制冷机。制冷机工作时, 它利用外界做功为 A , 使系统从低温热源吸热 Q_2 , 再向高温热源放热 Q_1 , 从而获得低温。制冷机的制冷系数为

$$\omega = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \quad (3-31)$$

(2) 卡诺 (N.L.S.Carnot) 循环: 系统只和两个恒温热源进行热交换的准静态循环过程。卡诺循环由四个准静态过程组成, 其中两个等温循环过程, 两个绝热过程。

卡诺循环 (卡诺热机) 的效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (3-32)$$

卡诺逆循环 (卡诺制冷机) 的致冷系数为

$$\omega = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (3-33)$$

式中, T_1 是高温热源的温度, T_2 是低温热源的温度。

10. 热力学第二定律

(1) 热力学第二定律

热力学过程, 包括单一过程和循环过程, 无论什么过程都遵从热力学第一定律。大量事实表明, 有些过程能够自发实现, 有些过程则不能自发实现, 特别是那些自发实现过程的逆过程没有外界的帮助是不可能实现的。热力学第二定律是反映自然界过程进行的方向和条件的规律, 它解决了物理过程进行的方向问题。

热力学第二定律的两种等价表述:

开尔文 (W.T.L.Kelvins) 表述: 不可能制造出一种循环工作的热机, 只从单一热源吸收热量, 使它完全转变为有用功, 而不产生其他影响。

克劳修斯 (R.J.E.Clausius) 表述: 热量不可能自动地从低温物体传向高温物体。

上述两种表述是等价的, 违背了克劳修斯表述也就违背了开尔文表述, 反之亦然。

热力学第二定律的统计解释: 一切自然过程总是沿着无序性增大的方向进行。这也是不可逆性的微观本质。

(2) 熵及熵增加原理

为了用数学形式表示热力学第二定律的微观本质, 引入热力学概率的概念。将一个宏观态中所包含的微观态的数目称为这种宏观状态的热力学概率, 用 Ω 表示。自然过程沿着向 Ω 增大的方向进行, 平衡态相应于一定宏观条件下热力学概率最大的状态。因此, 热力学概率 Ω 是分子热运动无序性大小的量度。

熵是为了判断在孤立系统中, 过程进行的方向而引入的系统状态的单值函数。若系统从状态 1 经历任一可逆过程变化到状态 2, 其熵的变化 ΔS 为

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (3-34)$$

该式也称为克劳修斯熵公式。对于一个可逆循环, 若系统从状态 1 经历一个不可逆过程变化到状态 2, 为了计算在这个过程中系统的熵变, 可以在状态 1 与状态 2 之间任意设想一个可逆过程, 再利用式 (3-34) 计算其熵变。

熵增加原理: 孤立系统内所进行的任何不可逆过程, 总是沿着熵增加的方向进行, 只有可逆过程, 系统的熵变才为零, 因而有

$$\Delta S \geq 0 \quad (3-35)$$

式 (3-35) 说明, 一个开始处于非平衡态的孤立系统, 必定逐渐向平衡态过渡, 在此过程中熵要增加, 最后达到平衡态时, 系统的熵达到最大值。因此, 用熵增加原理可判断过程进行的方向。

(3) 玻尔兹曼熵关系式

自然界一切自然发生的过程总是由概率小的宏观状态向概率大的宏观状态进行, 亦即由包含微观状态数目少的宏观状态向包含微观状态数目多的宏观状态进行。

若用 Ω 表示系统 (宏观) 状态所包含的微观状态数, 或把 Ω 理解为 (宏观) 状态出现的概率 (热力学概率), 则玻尔兹曼给出如下关系式:

$$S = k \ln \Omega \quad (3-36)$$

式中, k 是玻尔兹曼常量。该式表明: 熵是表示无序性或混乱度大小的。例如, 对于系统的某一宏观状态, 总有一个热力学概率 Ω 值与之对应, 因而也就有一个熵值与之对应。因此, 熵是系统的单值函数, 系统的状态确定了, 熵也就完全确定了。

3.3 重点难点分析

1. 本章重点

(1) 理解平衡态、准静态过程、体积功、热量、内能、循环过程、熵函数等概念; 掌握热力学第一定律在几个典型过程中功、热量、内能改变量的计算方法和对具体循环过程的分析; 理解热力学第二定律及其统计意义; 理解熵增加原理和熵的玻尔兹曼表达式的意义。

(2) 基于气体分子热运动的统计规律和统计研究方法的基础上, 理解压强、温度和内能概念及能量按自由度均分定理; 掌握麦克斯韦速率分布律及三种统计速率的物理意义。

2. 本章难点

(1) 综合运用理想气体状态方程、内能的表达式和热力学第一定律对典型热力学过程和循环过程的分析; 对实际热力学过程进行具有方向性的理解; 热力学第二定律及其统计意义; 态函数熵的定义及熵变的计算。

(2) 根据理想气体模型, 运用统计的方法研究气体的宏观性质和规律, 以及它们与分子微观量的平均值之间的关系, 从而揭示理想气体的性质和规律的本质。

3.4 精选例题与习题解答

1. 精选例题

例 3-1 质量为 m 的氦气 (视为理想气体), 由同一初态经历下列两种过程: (1) 等体过程; (2) 等压过程。温度升高了 ΔT , 要比较这两种过程中气体内能的改变, 有一种解答如下:

(1) 等体过程 $\Delta E_V = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T$; (2) 等压过程 $\Delta E_p = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T$ 。因为 $C_p > C_V$, 所以 $\Delta E_p > \Delta E_V$ 。以上解答是否正确? 如有错误请改正。

分析与解: 等容过程的解答是正确的, 等压过程的解答是错误的。正确的解应是: 因为理想气体的内能是状态 (温度) 的单值函数, 在准静态过程中, 内能 ΔE 只与系统的始、末温度有关, 与过程无关。所以, 在上述两种过程中, 初态相同, ΔT 相同时, ΔE 也相同, 即

$$(\Delta E)_p = (\Delta E)_V = (m / \mu) C_V \Delta T$$

式中 μ 为氮气的摩尔质量。

例 3-2 质量为 0.0028 kg、压强为 1 atm、温度为 27°C 的氮气，先在体积不变的情况下，使其压强增至 3 atm，再经等温膨胀，使压强降至 1 atm，然后又在等压 (1 atm) 下将其体积压缩一半。试求氮气在全部过程中内能的变化，它所做的功和吸收的热量，并把氮气的状态变化过程在 $p-V$ 图中表示出来。

分析：可先确定氮气在各个分过程中的初末状态，然后在 $p-V$ 图中表示氮气的状态变化的全过程。

解：设 I、II、III、IV 为氮气变化过程中所处的几个状态，各状态表示为 I (p_1, V_1, T_1)，其中 $p_1 = 1 \text{ atm}$ ， $T_1 = 300 \text{ K}$ ， V_1 待定；II (p_2, V_2, T_2)，其中 $p_2 = 3 \text{ atm}$ ， $V_2 = V_1$ 与 T_2 均待定；III (p_3, V_3, T_3)，其中 $p_3 = 1 \text{ atm}$ ， T_3 等于 T_2 为 900 K， V_3 待定；IV (p_4, V_4, T_4)，其中 p_4 等于 p_3 为 1 atm， $V_4 = V_3 / 2 = 3.69 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ， T_4 待定。各状态的变化过程，如图 3.4 所示。

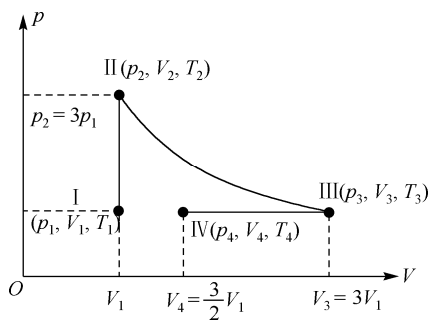


图 3.4 例 3-2 图

对氮气按理想气体考虑，则应用理想气体状态方程及氮气的等体变化，可求得 V_1 和 T_2 ，即

$$V_1 = \frac{M}{\mu} \frac{RT_1}{p_1} = \frac{2.8 \times 10^{-3}}{28 \times 10^{-3}} \times \frac{8.31 \times 300}{1.013 \times 10^5} = 2.46 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

在等体过程中，由于 $p/T = \text{恒量}$ ，所以

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1 = 3T_1 = 900 \text{ K}$$

在 II \rightarrow III 的等温膨胀过程中，由于 $pV = \text{恒量}$ ，所以 $p_2 V_2 = p_3 V_3$ ，故

$$V_3 = \frac{p_2 V_2}{p_3} = \frac{3p_1 V_2}{p_1} = 3V_2 = 7.38 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

在 III \rightarrow IV 的等压压缩过程中，因等压过程中 $V/T = \text{恒量}$ ，所以

$$T_4 = \frac{V_4 T_3}{V_3} = \frac{1}{2} T_3 = 450 \text{ K}$$

氮气经历 I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow IV 全部过程中内能的变化，所做的功和吸收的热量如下。

内能的变化 ΔE ：由理想气体内能公式，有

$$\begin{aligned}
 E_4 - E_1 &= \frac{M}{\mu} C_V (T_4 - T_1) = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R (T_4 - T_1) \\
 &= \frac{2.8 \times 10^{-3}}{28 \times 10^{-3}} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (450 - 300) = 312 \text{ J}
 \end{aligned}$$

式中, $C_V = \frac{i}{2} R$ (取 $i = 5$) 计算。

全过程中所做的功:

$$A_{I \rightarrow II} = 0$$

$$A_{II \rightarrow III} = Q_{II \rightarrow III} = \frac{M}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = 0.1 \times 8.31 \times 900 \times \ln 3 = 823 \text{ J}$$

$$A_{III \rightarrow IV} = p_3 (V_4 - V_3) = 1.013 \times 10^5 \times (-3.69 \times 10^{-3}) = -374 \text{ J}$$

所以, 总功

$$A = A_{I \rightarrow II} + A_{II \rightarrow III} + A_{III \rightarrow IV} = 449 \text{ J}$$

全过程中所吸收的热量:

$$Q_{I \rightarrow II} = \Delta E_{I \rightarrow II} = \frac{M}{\mu} C_V (T_2 - T_1) = 0.1 \times 20.8 \times 600 = 1248 \text{ J}$$

$$Q_{II \rightarrow III} = A_{II \rightarrow III} = \frac{M}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = 0.1 \times 8.31 \times 900 \times \ln 3 = 823 \text{ J}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{III \rightarrow IV} &= \Delta E_{III \rightarrow IV} + A_{III \rightarrow IV} = \frac{M}{\mu} R (T_2 - T_3) + p_3 (V_4 - V_3) \\
 &= 0.1 \times 20.8 \times (-450) + (-347) = -1310 \text{ J}
 \end{aligned}$$

所以, 总热量

$$Q = Q_{I \rightarrow II} + Q_{II \rightarrow III} + Q_{III \rightarrow IV} = 761 \text{ J}$$

注: 在上述计算中, III \rightarrow IV是等压过程中, 所做的功也可用 $A_{III \rightarrow IV} = \frac{M}{\mu} R (T_4 - T_3) = -374 \text{ J}$ 计算得到; 氮气经历 I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow IV全部过程中内能的变化也可用 $E_4 - E_1 = Q - A = 312 \text{ J}$ 计算得到。

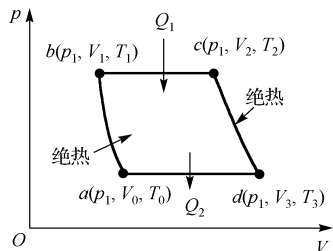


图 3.5 喷气式发动机循环

例 3-3 喷气发动机的循环可近似地用图 3.5 所示的 $a-b-c-d$ 循环来表示, 试求其效率。

分析: 喷气式发动机的循环是由两个等压过程和两个绝热过程构成的。在 ab 、 cd 绝热过程中, 系统不与外界交换热量; bc 为系统等压膨胀吸热过程; da 为系统等压压缩放热过程, 分别计算出这两过程的吸热、放热, 则可计算热机效率。

解: 由图 3.5 所示, 系统在两绝热过程中不与外界交换热量, 而 bc 为系统等压膨胀吸热过程, 吸收的热量为

$$Q_1 = \frac{M}{\mu} C_p (T_2 - T_1)$$

da 为等压压缩放热过程, 放出的热量为

$$Q_2 = \frac{M}{\mu} C_p (T_3 - T_0)$$

由热机的效率公式, 可得喷气式发动机的效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}$$

又由于 ab 、 cd 为绝热过程, 因而有绝热方程 $p^{\gamma-1} T^{-\gamma} = \text{恒量}$, 故有

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

亦即有 $\frac{T_3}{T_0} = \frac{T_2}{T_1}$, 代入上式得到喷气式发动机循环的效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1 - \frac{T_0}{T_1}$$

例 3-4 一容器体积为 V_2 , 用隔板分为 A 、 B 两部分, A 室装有物质的量为 γ 的理想气体, 初始温度为 T , 体积为 V_1 , B 室为真空。迅速抽出隔板, 使气体向真空膨胀, 计算气体的熵变。

分析与解: 这是一理想气体的自由膨胀过程, 在此过程中系统不与外交换热量、不对外做功、内能不改变, 亦即是一个 $Q=0$, $A=0$, $\Delta E=0$ 的可逆过程。由于熵是态函数, 某一过程中的熵变只与始末状态有关, 与过程可逆与否无关, 所以对于不可逆过程可以用可逆过程来替代计算其熵变。由于初末态温度相同, 体积从 V_1 膨胀到 V_2 , 故可设想系统是经历一个准静态的等温膨胀过程。因为设想的过程是可逆的, 故有

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dE + pdV}{T} = \int_1^2 \frac{pdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \gamma R \frac{dV}{V} = \gamma R \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$$

例 3-5 一个绝热容器被绝热板 P 分成体积相等的两部分, 一边装有氦气, 温度为 250 K, 另一边装有氧气, 温度为 300 K, 两者压强相等, 求去掉绝热板后, 两种气体的混合温度。

分析: 题目已知: 混合前, $V_{\text{He}} = V_{\text{O}_2}$, $T_{\text{He}} = 250 \text{ K}$, $T_{\text{O}_2} = 310 \text{ K}$, $P_{\text{He}} = P_{\text{O}_2}$; 求解的问题: 混合后温度 T , 即求解混合气体的内能和温度; 解题方法: 已知混合前 P 、 T 、 V , 求混合后温度 T , 应用理想气体状态方程和内能公式求解。

解: 混合前

$$P_{\text{He}} V = \nu_{\text{He}} R T_{\text{He}}$$

$$P_{\text{O}_2} V = \nu_{\text{O}_2} R T_{\text{O}_2}$$

所以有

$$\nu_{\text{He}} T_{\text{He}} = \nu_{\text{O}_2} T_{\text{O}_2}$$

且总内能

$$E_0 = E_{\text{He}} + E_{\text{O}_2} = \frac{3}{2} \nu_{\text{He}} R T_{\text{He}} + \frac{5}{2} \nu_{\text{O}_2} R T_{\text{O}_2} = \frac{8}{2} \nu_{\text{He}} R T_{\text{He}}$$

混合后, 总内能

$$E = \frac{3}{2} \nu_{\text{He}} R T + \frac{5}{2} \nu_{\text{O}_2} R T = \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \frac{T_{\text{He}}}{T_{\text{O}_2}} \right) \nu_{\text{He}} R T$$

能量守恒气体混合前后的总内能不变, 即有

$$\frac{8}{2} \nu_{\text{He}} R T_{\text{He}} = \left(\frac{3}{2} + \frac{5 T_{\text{He}}}{2 T_{\text{O}_2}} \right) \nu_{\text{He}} R T$$

两种气体的混合温度

$$T = \frac{8 T_{\text{He}}}{3 + 5 T_{\text{He}} / T_{\text{O}_2}} = \frac{8 \times 250}{2 + 5 \times 250 / 310} = 284 \text{ K}$$

例 3-6 两瓶不同的理想气体, 它们的温度和压强都相等, 但是体积不同, 则它们分子数密度 n 、质量密度 ρ 和单位体积内气体分子的平均动能 $\frac{E}{V}$ 有关系 ()。

- A. n 不同, ρ 不同, $\frac{E}{V}$ 不同 B. n 不同, ρ 相同, $\frac{E}{V}$ 不同
C. n 相同, ρ 不同, $\frac{E}{V}$ 相同 D. n 不同, ρ 相同, $\frac{E}{V}$ 相同

分析与解: 两瓶不同种类的理想气体, 它们的温度和压强都相同, 但体积不同, 则它们的分子数密度 $n = \frac{p}{kT}$, n 相同; 质量密度 $\rho = \frac{\mu N}{V} = \mu n$, 由于 μ 不相同, n 相同, 则 ρ 不同; 而单位体积内总的气体分子的平均平动动能 $\frac{E}{V} = \frac{N \bar{w}}{V} = n \frac{3kT}{2}$ 相同。故选项 C 为正确答案。

例 3-7 绝热容器被隔板分为两半: 一半是真空, 另一半是理想气体。若把隔板抽出, 气体将进行自由膨胀, 达到平衡后, ()。

- A. 温度不变, 熵增加 B. 温度升高, 熵增加
C. 温度降低, 熵增加 D. 温度不变, 熵不变

分析与解: 在隔板抽出后, 气体将等温自由膨胀, 达到平衡后温度仍然不变; 根据熵增加原理: 当一个孤立的热力学系统, 从一平衡态绝热过程达到另一平衡态时, 如果过程是不可逆的, 它的熵的数值增加。所以选项 A 是正确答案。

例 3-8 用总分子数 N , 气体分子速率 v 和速率分布函数 $f(v)$ 表示以下各量。

- (1) 速率大于 v_0 的分子数;
 (2) 速率大于 v_0 的分子的平均速率;
 (3) 多次观察某一分子的速率, 发现其速率大于 v_0 的概率。

分析: 本题是关于对麦克斯韦速率分布律的物理意义的理解及应用。

解: (1) 由 $f(v) = \frac{dN}{Ndv}$ 有

$$dN = f(v)Ndv$$

速率大于 v_0 的分子数, 即速率在 $v_0 \rightarrow \infty$ 区间的分子数为

$$\Delta N = \int dN = \int_{v_0}^{\infty} Nf(v) dv$$

- (2) 由平均值公式可得速率大于 v_0 的分子的平均速率

$$\bar{v} = \frac{\int v dN}{\Delta N} = \frac{\int v Nf(v) dv}{\Delta N} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} v Nf(v) dv}{\int_{v_0}^{\infty} Nf(v) dv} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} v f(v) dv}{\int_{v_0}^{\infty} f(v) dv}$$

- (3) 多次观察某一分子的速率, 发现其速率大于 v_0 的概率

$$P = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\int_{v_0}^{\infty} Nf(v) dv}{N} = \int_{v_0}^{\infty} f(v) dv$$

2. 习题解答

(一) 气体动理论

3.1 关于温度的意义, 有下列说法: (1) 气体的温度是分子平均平动动能的量度; (2) 气体的温度是大量气体分子热运动的集体表现, 具有统计意义; (3) 温度的高低反映物体内部分子运动剧烈程度的不同; (4) 从微观上看, 气体的温度表示每个气体分子的冷热程度。上述说法正确的是 ()。

- A. (1) (2) (4) B. (1) (2) (3)
 C. (2) (3) (4) D. (1) (3) (4)

分析与解: 从统计意义来说, 气体的温度是分子平均平动动能的量度、是大量气体分子热运动的集体表现、同时温度的高低反映了物体内部分子运动剧烈程度的不同, 对个别分子说它有温度是没有意义的, 所以答案选 B。

3.2 有两瓶气体, 一瓶是氦气, 另一瓶是氮气, 它们的压强相等, 温度也相等, 但是体积不同, 则 ()。

- A. 单位体积内气体的质量相等 B. 单位体积内原子数相等
 C. 单位体积内气体的分子数相等 D. 单位体积内气体的内能相等

分析与解: 由理想气体压强公式 $p = nkT$ 可知, 题目中氦气与氮气压强相等、温度也相等, 故单位体积内气体的分子数 n 也相等, 但单位体积内两种气体的质量和内能就不相等了, 所以正确选项为 C。

3.3 设 \bar{v} 代表气体分子运动的平均速率, v_p 代表气体分子运动的最概然速率, $(\bar{v}^2)^{1/2}$ 代表气体分子运动的方均根速率。在某一温度下处于平衡状态下某种理想气体, 这三种速率关系为 ()。

- A. $(\bar{v}^2)^{1/2} = \bar{v} = v_p$ B. $\bar{v} = v_p < (\bar{v}^2)^{1/2}$ C. $v_p < \bar{v} < (\bar{v}^2)^{1/2}$ D. $v_p > \bar{v} > (\bar{v}^2)^{1/2}$

分析与解: 从三种统计速率的表达式或者麦克斯韦速率分布曲线可以看出, 对于在某一温度下的同种理想气体, 三种统计速率有 $v_p < \bar{v} < (\bar{v}^2)^{1/2}$ 的大小关系, 故本题选 C。

3.4 一容器内装有 N_1 个单原子理想气体分子和 N_2 个刚性双原子理想气体分子, 当该系统处在温度为 T 的平衡态时, 其内能为 ()。

- A. $(N_1+N_2)\left(\frac{3}{2}kT + \frac{5}{2}kT\right)$ B. $\frac{1}{2}(N_1+N_2)\left(\frac{3}{2}kT + \frac{5}{2}kT\right)$
C. $N_1\frac{5}{2}kT + N_2\frac{3}{2}kT$ D. $N_1\frac{3}{2}kT + N_2\frac{5}{2}kT$

分析与解: 单原子理想气体分子有 3 个平动自由度, 刚性双原子理想气体分子有 3 个平动自由度和 2 个转动自由度, 由自由度均分定理可知, D 为正确选项。

3.5 已知一定量的某种理想气体, 在温度为 T_1 与 T_2 时的分子最概然速率分别为 v_{p1} 和 v_{p2} , 分子速率分布函数的最大值分别为 $f(v_{p1})$ 和 $f(v_{p2})$ 。若 $T_1 > T_2$, 则 ()。

- A. $v_{p1} > v_{p2}$, $f(v_{p1}) > f(v_{p2})$ B. $v_{p1} > v_{p2}$, $f(v_{p1}) < f(v_{p2})$
C. $v_{p1} < v_{p2}$, $f(v_{p1}) > f(v_{p2})$ D. $v_{p1} < v_{p2}$, $f(v_{p1}) < f(v_{p2})$

分析与解: 由麦克斯韦速率分布律可知, 对于同种理想气体, 温度越高最概然速率 v_p 越大, 而对应的速率分布函数 $f(v_p)$ 越小, 故 B 为正确选项。

3.6 气缸中盛有一定量的氢气, 当温度不变而压强增大一倍时, 氢气分子的平均碰撞频率 \bar{Z} 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的变化情况是 ()。

- A. \bar{Z} 和 $\bar{\lambda}$ 都增加一倍 B. \bar{Z} 和 $\bar{\lambda}$ 都减半
C. \bar{Z} 减半而 $\bar{\lambda}$ 增加一倍 D. \bar{Z} 增加一倍而 $\bar{\lambda}$ 减半

分析与解: 根据分子的平均碰撞频率 \bar{Z} 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的公式, 可以判断 D 为正确选项。

3.7 在推导理想气体压强公式时, 体现统计意义的两条假设是: (1) _____; (2) _____。

分析与解: 在推导理想气体压强公式时, 体现统计意义的两条假设是: (1) 在平衡态时, 若忽略重力影响, 则沿空间各个方向运动的分子数目相等, 或每个分子在空间内任何一点的机会 (概率) 相等; (2) 在平衡态时有 $\bar{v}_x = \bar{v}_y = \bar{v}_z$, $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ 。

3.8 目前可获得的极限真空为 10^{-13} mmHg 的数量级, 若气温为 27°C , 此时真空室内每立方厘米的空气分子数为_____。

分析与解: 由理想气体压强公式 $p = nkT$ 可知, $n = \frac{p}{kT} = 3.21 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ 。

3.9 根据能量按自由度均分原理, 设气体分子为刚性分子, 分子自由度为 i , 则当温度为 T 时, 一个分子的平均动能为_____, 1 mol 氧气分子的转动动能总和为_____。

分析与解: 由能量按自由度均分原理, 一个分子的自由度数 i , 所以平均动能为 $\frac{1}{2}ikT$; 刚性分子的转动自由度 $r=2$, 1 mol 氧气的分子数为 N_A ($=R/k$)。所以, 1 mol 氧气分子的转动动能总和为 $N_A \cdot \frac{r}{2}kT = RT$ 。

3.10 一定量的理想气体, 其热力学内能完全决定于气体分子的_____, 与气体的压强和体积无关; 一定量的理想气体, 在不同的状态变化过程中, 只要_____的变化量相等, 那么它的热力学内能的变化也相同, 而与过程无关。

分析与解: 关键注意对理想气体这一理想模型的理解。理想气体的内能是气体内所有分子的动能和分子内原子间的势能之和。若 i 表示一个分子的总自由度数, 则分子具有 t 个平动自由度, r 个转动自由度, s 个振动自由度, 所以按能量均分定理, 每个分子平均能量为 $\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2}kT = \frac{t+r+s}{2}kT$ 。对于单原子、双原子及刚性多原子, 自由度是各不相同的。对一定量的理想气体, 若该气体分子的自由度为 i , 那么理想气体分子的平均能量为

$$E = N\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} \cdot \frac{N}{N_A} \cdot N_A kT = \frac{i}{2} \nu RT$$

由此可见, 一定量的理想气体, 其热力学内能完全决定于气体分子的**自由度和气体的热力学温度** T , 与气体的压强和体积无关; 同样, 一定量的理想气体, 在不同的状态变化过程中, 只要**温度**的变化量相等, 那么它的热力学内能的变化也相同, 而与过程无关。

3.11 麦克斯韦速率分布函数的物理意义是_____。

分析与解: 麦克斯韦速率分布函数 $f(v) = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dv}$ 的物理意义: “在某一温度下处于平衡态的理想气体, 其速率在 v 附近的单位速率区间 dv 的分子数 dN 占总分子数 N 的百分比。”

3.12 容器内有 1 mol 的某种气体, 今从外界输入 $2.09 \times 10^2\text{ J}$ 热量, 测得其温度升高 10 K , 求该气体分子的自由度。

分析: 容器的容积不变时, 从外界输入的热量全部转化为理想气体分子内能的增量。理想气体的内能是温度 T 的单值函数并按自由度均分。

解: 设气体分子的自由度为 i , 外界输入的热量 Q 全部转化为理想气体分子内能的增量即

$$Q = \Delta E$$

温度为 T 时, 1 mol 理想气体的内能为 $E = \frac{1}{2}iRT$, 内能的增量为

$$\Delta E = \frac{1}{2}iR\Delta T$$

故可得气体分子的自由度

$$i = \frac{2Q}{R\Delta T} = 5$$

由此可判断, 该气体分子是双原子分子。

3.13 导体中自由电子的运动类似于气体分子的运动。设导体中共有 N 个自由电子, 电子气中电子最大速率 v_F 称为费米速率。电子速率在 v 与 $v+dv$ 之间的概率为

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} \frac{4\pi v^2 A dv}{N}, & (v_F > v > 0) \\ 0, & (v > v_F) \end{cases}$$

式中 A 为常量。(1) 归一化条件 A ; (2) 证明电子气中电子的平均动能 $\bar{\omega} = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} m_e v_F^2 \right) = \frac{3}{5} E_F$, 此处 E_F 称为费米能。

分析: 根据速率分布函数的意义和归一化条件, 结合已知条件可求出归一化常数 A 和电子的平均动能。

解: (1) 由归一化条件

$$\int_0^\infty f(v) dv = \int_0^{v_F} \frac{4\pi v^2 A dv}{N} = 1$$

得

$$A = \frac{3N}{4\pi v_F^3}$$

(2) 平均动能

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{2} m_e \bar{v}^2 = \frac{1}{2} m_e \int_0^\infty v^2 f(v) dv \\ &= \frac{1}{2} m_e \int_0^{v_F} \frac{4\pi v^2 A dv}{N} = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{2} m_e v_F^2 \right) = \frac{3}{5} E_F \end{aligned}$$

3.14 真空管的线度为 10^{-2} m, 真空度为 10^{-5} mmHg, 有效直径为 3×10^{-10} m 的分子。求在 27°C 时, 管内空气的分子数密度、平均碰撞频率和平均自由程是多少?

分析: 平均自由程和平均碰撞频率是气体动理论中的重要概念之一, 本题首先由理想气体压强公式求得空气的分子数密度, 然后再利用平均碰撞频率和平均自由程公式计算。

解: 由理想气体压强公式 $p = nkT$, 得到分子数密度

$$n = \frac{p}{kT} = 3.22 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

平均碰撞频率

$$\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n = 60 \text{ s}^{-1}$$

平均自由程

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} = 7.79 \times 10^{-2} \text{ m}$$

讨论: 由于 27°C 时, 分子平均自由程 $\bar{\lambda}' = 7.79 \times 10^{-2} \text{ m}$ 大于实际真空管线度 $L = 10^{-2} \text{ m}$, 故取分子的平均自由程 $\bar{\lambda}' \approx 10^{-2} \text{ m}$, 所以实际上分子碰撞频率为 $\bar{Z}' = \frac{\bar{v}'}{\bar{\lambda}'} = 4.68 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ 。

3.15 求氢气在标准状态下, 在 1 s 内分子的平均碰撞频率。已知氢分子的有效直径为 $2 \times 10^{-10} \text{ m}$ 。

分析: 首先求出气体分子的平均速率, 再求出分子的平均自由程, 最后代入平均碰撞频率公式直接求解。

解: 气体分子在标准状态下, 其算术平均速率为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 300}{3.14 \times 2 \times 10^{-3}}} = 1.78 \times 10^3 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

由气体压强公式 $p = nkT$, 得到单位体积的分子数

$$n = \frac{p}{kT} = 2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

因此, 氢气分子的平均自由程为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = 2.10 \times 10^{-7} \text{ m}$$

可见, 平均自由程约为分子直径的 1000 倍, 故氢气分子的平均碰撞频率为

$$\bar{Z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = 8.10 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$$

即在标准状态下, 在 1 s 内, 一个氢气分子的平均碰撞次数约有 80 亿次。

3.16 在温度为 0°C 和压强为 $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 下, 空气密度是 $1.293 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\bar{v} = 4.6 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\bar{\lambda} = 6.4 \times 10^{-8}$, 求黏度是多少?

分析: 由已知数据, 直接利用气体黏度公式计算。

解: 气体的黏度

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} = \frac{1}{3} \times 1.293 \times 6.4 \times 10^{-8} \times 4.6 \times 10^2 \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ &= 1.27 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

3.17 由实验测定在标准状态下, 氧气的扩散系数为 $1.87 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, 根据该数据计算氧分子的平均自由程和分子的有效直径。

分析: 由气体扩散系数公式和算术平均速率表达式, 可算出平均自由程, 再由平均自由程公式, 进一步算出分子的有效直径。

解: 气体的扩散系数为 $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$, 算术平均速率为 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$, 得

$$\bar{\lambda} = \frac{3D}{\bar{v}} = 3D \sqrt{\frac{\pi M_{\text{O}_2}}{8RT}} = 1.32 \times 10^{-7} \text{ m}$$

由分子的平均自由程 $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$ 可得分子的有效直径为

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2}\pi \bar{\lambda} p}} = 2.52 \times 10^{-10} \text{ m}$$

3.18 吹一个直径为 10 cm 的肥皂泡, 设肥皂泡的表面张力系数 $\alpha = 40 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。试求吹此肥皂泡所做的功, 以及泡内外的压强差。

分析: 由液体的表面张力系数及液体的总表面, 可计算吹肥皂泡所做的功。

解: 肥皂泡的总表面积为 $\Delta s = 2 \times 4\pi r^2$ 。所以, 吹此肥皂泡所做的功及泡内外的压强差为

$$\Delta w = \alpha \cdot \Delta s = 40 \times 10^{-3} \times 8\pi \times 25 \times 10^{-4} \text{ J} = 8\pi \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$\Delta p = \frac{4\alpha}{R} = \frac{4 \times 40 \times 10^{-3}}{10^{-2}} \text{ Pa} = 1.6 \text{ Pa}$$

3.19 一 U 形玻璃管的两竖起管直径分别为 1.0 mm 和 3.0 mm, 试求两管内水面的高度差。(其中水的表面张力系数 $\alpha = 7.3 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 。)

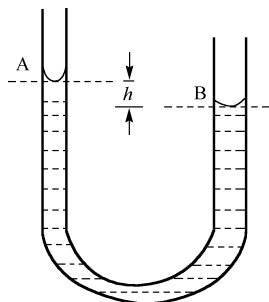


图 3.6 习题 3.19 图

分析: 由于液体的浸润使液面弯曲而产生一附加压强, 这个附加压强与弯曲表面的半径和表面张力系数有关。即与液体表面张力系数成正比, 与液面的曲率半径成反比, 为 $p = \pm 2\alpha / r$, 方向指向曲面凹的一侧。于是可由两管在同一水平面的压强相等, 建立等式求出液体在两管中的高度差。

解: 如图 3.6 所示, 设两 U 形竖直管的半径分别为 r_A 和 r_B , 由于液体的浸润而使液面弯曲产生附加压强, 因而在两管中 A、B 两点的压强为

$$p_A = p_0 - \frac{2\alpha}{r_A}$$

$$p_B = p_0 - \frac{2\alpha}{r_B}$$

根据流体静力学原理, A、B 两点的压强关系为

$$p_B = p_A + \rho gh \quad \text{或} \quad -\frac{2\alpha}{r_B} = -\frac{2\alpha}{r_A} + \rho gh$$

解上式得两管内水面的高度差

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

3.20 当半径为 $r = 2.0 \times 10^{-6} \text{ m}$ 的许多小水滴融合成半径为 $R = 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 的大水滴时, 求释放出的能量。

分析：小水滴融合成大水滴时，水滴的表面积将发生变化，从而引起表面能的变化。表面能的变化量为 $\Delta E = \alpha \Delta S$ 。

解：设大水滴由 n 个小水滴融合而成，融合后半径为 R ，小水滴的半径为 r ，因而水滴表面能的变化为

$$\Delta E = \alpha \Delta S = \alpha \cdot 4\pi(R^2 - nr^2)$$

又由于 n 个小水滴体积之和等于大水滴体积，即 $n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$ ，故有

$$n = \frac{R^3}{r^3}$$

将 n 代入表面能关系 ΔE 的公式，得

$$\begin{aligned}\Delta E &= \alpha \Delta S = \alpha \cdot 4\pi(R^2 - nr^2) \\ &= \alpha \cdot 4\pi R^2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) = 3.67 \times 10^{-3} \text{ J}\end{aligned}$$

(二) 热力学基础

3.21 关于热功转换和热量传递过程，有下面一些叙述：① 功可以完全变为热量，而热量不能完全变为功；② 一切热机效率都只能小于 1；③ 热量不能从低温物体向高温物体传递；④ 热量从高温物体向低温物体传递是不可逆的。以上叙述（ ）。

- A. 只有②和④正确 B. 只有②、③和④正确
C. 只有①、③和④正确 D. 全部正确

分析与解：正确理解热功转换和热量传递过程。功可以完全变为热量，热量也能完全变为功，但要产生其他影响；一切热机效率都只能够小于 1，该说法是正确的。由热机效率公式 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ ，因为低温热源的温度 T_2 不可能达到绝对零度，所以效率只能够小于 1；

热量可以从低温物体向高温物体传递，但必然要产生其他影响；因为热力学第二定律指出，热量不可能自发地从低温物体传向高温物体，所以热量从高温物体向低温物体传递是不可逆的。因此，A 为正确选项。

3.22 如图 3.7 所示，一定量理想气体从体积 V_1 膨胀到体积 V_2 分别经历的过程是， $A \rightarrow B$ 等压过程， $A \rightarrow C$ 等温过程， $A \rightarrow D$ 绝热过程，其中吸热量最多的过程（ ）。

- A. 是 $A \rightarrow B$ B. 是 $A \rightarrow C$
C. 是 $A \rightarrow D$ D. 既是 $A \rightarrow B$ 也是 $A \rightarrow C$ ，两过程吸热一样多

分析与解：热力学第一定律对于理想气体准静态过程的应用。显然 $A \rightarrow D$ 是绝热过程，吸收热量为零；由图可以看出， $A \rightarrow B$ 等压过程的体积功大于等温过程（内能不变） $A \rightarrow C$ 的体积功，该理想气体在这两种情况下的末态温度 $T_B > T_C$ ，故内能 $E_B > E_C$ ，初态的温度和内能均一样，所以 $A \rightarrow B$ 等压过程吸收热量大于等温过程 $A \rightarrow C$ 吸收的热量。因此，A 为正确选项。

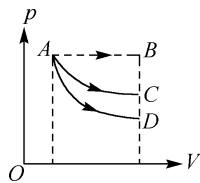


图 3.7 习题 3.22 图

3.23 压强、体积和温度都相同(常温条件)的氧气和氦气在等压过程中吸收了相等的热量,它们对外做的功之比为()。

- A. 1:1 B. 5:7 C. 5:9 D. 9:5

分析与解: 由理想气体状态方程 $pV = \frac{m}{M}RT$ 可知,两种气体的物质的量相同;两种气体在等压过程中吸收的热量相等,由公式 $Q_p = \frac{m}{M}C_{p,m}\Delta T$ 可知,氧气与氦气的温度变化之比为 5:7,又由等压过程的气体对外做功的公式 $A = \frac{m}{M}R\Delta T$ 可知,它们对外做功之比为 5:7。因此, B 为正确选项。

3.24 有人设计一台可逆卡诺机,每循环一次可从 400 K 的高温热源吸热 1800 J,向 300 K 的低温热源放热 800 J,同时对外做功 1000 J,这样的设计是()。

- A. 可以的,是符合热力学第一定律的
B. 可以的,是符合热力学第二定律的
C. 不可以的,卡诺循环做的功不能大于向低温热源放出的热量
D. 不可以的,这个热机的效率超过理论值

分析与解: 根据卡诺定理可知, D 为正确选项。

3.25 设热源的热力学温度是冷源的热力学温度的 n 倍,则在一个卡诺循环中,气体交给冷源的热量是从热源得到的热量的()。

- A. n 倍 B. $n-1$ 倍 C. $\frac{1}{n}$ 倍 D. $\frac{n+1}{n}$ 倍

分析与解: 根据卡诺热机效率公式可知, C 为正确选项。

3.26 如图 3.8 所示,在 $P-V$ 图上有两条曲线 abc 和 adc ,由此可以得出以下结论()。

- A. 其中一条是绝热线,另一条是等温线
B. 两个过程热吸收的量相同
C. 两个过程中系统对外做的功相等
D. 两个过程中系统的内能变化相同

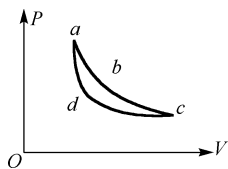


图 3.8 习题 3.26 图

分析与解: 从题图曲线看,不能确定图中是否一条是绝热线,另一条是等温线;两个过程的初末状态一样,所以内能变化一样;根据体积功的几何意义,两过程中系统对外做功不相等,那么根据热力学第一定律,两个过程热吸收的量也不相等。因此, D 为正确选项。

3.27 “理想气体和单一热源接触做等温膨胀时,吸收的热量全部用来做功。”对此说法,有如下几种评论,哪种是正确的?()。

- A. 不违反热力学第一定律,也不违反热力学第二定律
B. 不违反热力学第二定律,但是违反热力学第一定律
C. 不违反热力学第一定律,但是违反热力学第二定律
D. 违反热力学第一定律,也违反热力学第二定律

分析与解: 热力学第一定律是包含热现象在内的能量转换与守恒定律;热力学第二定律则是指明过程进行的方向与条件的另一基本定律。A 为正确选项。

3.28 一定量的理想气体,从同一状态开始把其体积从 V_0 压缩到 $V_0/2$,分别经历以下三种过程:(1)等压过程;(2)等温过程;(3)绝热过程。其中:_____外界对气体做功最多;_____气体放热最多;_____气体内能减少最多。

分析与解:热力学第一定律对于理想气体准静态过程的应用,注意对等压过程、等温过程、绝热过程特点的理解和掌握。题目中绝热过程外界对气体做功最多;等压过程气体放热最多;等压过程气体内能减少最多,可结合 p - V 分析,易于理解。

3.29 卡诺致冷机,其低温热源温度 $T_2 = 300\text{ K}$,高温热源温度为 $T_1 = 450\text{ K}$ 。每一循环从低温热源吸热 $Q_2 = 400\text{ J}$,则该致冷机的致冷系数(A 为外界做的功)_____,每一循环中外界对系统必须做功 $A =$ _____。

分析与解:题目中卡诺致冷机的致冷系数为 $\omega_c = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{300\text{ K}}{450\text{ K} - 300\text{ K}} = 2$,每一循环外界对系统做功为 $A = \frac{Q_2}{\omega_c} = \frac{400\text{ J}}{2} = 200\text{ J}$ 。

3.30 2 mol 单原子理想气体,经一等容过程后,温度从200 K升到500 K。若该过程为准静态过程,气体吸收的热量为_____,若该过程为不平衡过程,气体吸收的热量为_____。

分析与解:理想气体在等容过程中吸收的热量完全用来增加内能,故吸收热量 $Q_V = \Delta E = \frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1) = 7.479 \times 10^3\text{ J}$,由热力学第一定律可知,两种过程吸收热量相等。

3.31 在一个孤立系统内,一切实际过程都向着_____进行的,这是热力学第二定律的统计意义。从宏观上说,一切与热现象有关的实际过程都是_____。

分析与解:热力学第二定律是指明热力学过程进行的方向与条件的基本定律。在一个孤立系统内,一切实际过程都由概率小的状态向概率大的状态进行的,这是热力学第二定律的统计意义。从宏观上说,一切与热现象有关的实际的过程都是不可逆的。

3.32 1 mol 单原子理想气体从300 K加热至350 K,(1)体积保持不变,(2)压强保持不变,问在这两过程中各吸收了多少热量?增加了多少内能?对外做了多少功?

分析:理想气体的内能是温度 T 的单值函数,内能的增量 ΔE 由始、末状态的温度的增量 ΔT 决定,与经历的准静态过程无关。根据热力学第一定律可知,在等体过程中,系统从外界吸收的热量全部转化为内能的增量,在等压过程中,系统从外界吸收的热量部分转变为内能的增量,同时对外界做功。

解:单原子理想气体自由度 $i = 3$, $C_{V,m} = \frac{3}{2}R$

(1) 等体升温过程:

$$A_V = 0$$

$$Q_V = \Delta E = C_{V,m} (T_2 - T_1) = 6.23 \times 10^2\text{ J}$$

(2) 等压膨胀过程:

$$\Delta E = C_{V,m} (T_2 - T_1) = 6.23 \times 10^2\text{ J}$$

$$A_p = p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1) = 4.16 \times 10^2 \text{ J}$$

$$Q_p = \Delta E + A = 1.039 \times 10^3 \text{ J}$$

3.33 一定量的单原子分子理想气体, 从 A 态出发经等压过程膨胀到 B 态, 又经绝热过程膨胀到 C 态, 如图 3.9 所示。试求这全过程中气体对外所做的功, 内能的增量以及吸收的热量。

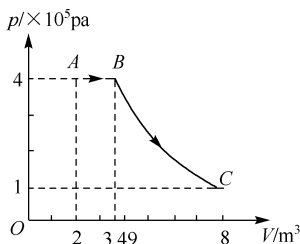


图 3.9 习题 3.33 图

分析与解: 由图可以看出

$$p_A V_A = p_C V_C$$

从状态方程 $pV = \gamma RT$ 可知 $T_A = T_C$, 因此全过程 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 的 $\Delta E = 0$, $B \rightarrow C$ 过程是绝热过程, 有 $Q_{BC} = 0$, $A \rightarrow B$ 的过程是等压过程, 有

$$Q_{AB} = \gamma C_p (T_B - T_A) = \frac{5}{2} (p_B V_B - p_A V_A) = 14.9 \times 10^5 \text{ J}$$

故全过程 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 吸收的热量

$$Q = Q_{BC} + Q_{AB} = 14.9 \times 10^5 \text{ J}$$

根据热力学第一定律 $Q = W + \Delta E$, 得全过程 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 气体对外所做的功

$$W = Q - \Delta E = 14.9 \times 10^5 \text{ J}$$

3.34 理想气体做绝热膨胀, 由初态 (p_0, V_0) 至末态 (p, V) 。试证明在此过程中气体所做的功为

$$A = \frac{p_0 V_0 - pV}{\gamma - 1}$$

分析: 利用绝热过程方程 $pV^\gamma = C$ 得到绝热过程的功。

证明: 绝热过程满足 $p_0 V_0^\gamma = pV^\gamma = C$

在由初态 (p_0, V_0) 至末态 (p, V) 的绝热膨胀过程中, 理想气体对外界做功

$$A = \int p dV = \int_{V_0}^V \frac{p_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{p_0 V_0^\gamma}{(\gamma - 1)} \left(\frac{1}{V_0^{\gamma-1}} - \frac{1}{V^{\gamma-1}} \right) = \frac{p_0 V_0 - pV}{(\gamma - 1)}$$

证毕。

3.35 一热机在 1000 K 和 300 K 的两热源间工作。如果 (1) 高温热源提高到 1100 K, (2) 低温热源降到 200 K, 求理论上的热机效率各增加到多少? 为了提高热机效率哪一种方案更好?

分析: 工作在两热源之间的热机是卡诺机, 卡诺热机循环的理论效率为 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ 。

解: 工作在 1000 K 和 300 K 的两热源间的卡诺热机效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 70\%$$

情况(1): 高温热源温度提高到 $T_1' = 1100 \text{ K}$ 时, 卡诺热机的效率为

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1'} = 72.7\%$$

情况(2): 低温热源的温度降低到 $T_2' = 200 \text{ K}$, 效率为

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_2'}{T_1} = 80\%$$

计算表明: 第二种情况的效率更高, 但以降低 T_2 来提高热机效率的方法通常是不可取的。热机工作时一般以环境空气或流水为低温热源, 降低环境温度 T_2 需动用致冷机, 显然这是不经济的。所以, 一般用提高高温热源温度的方法来提高热机的工作效率。

3.36 有 25 mol 的单原子气体, 作如图 3.10 所示的循环过程(ac 为等温过程)。 $p_1 = 4.15 \times 10^5 \text{ Pa}$, $V_1 = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, $V_2 = 3.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 。求: (1) 各过程中的热量、内能改变以及所做的功; (2) 循环的效率。

分析: 利用理想气体的物态方程和热力学第一定律, 求各过程的热量、内能增量以及所做的功。对于一般的热机效率, 需注意在整个循环过程中, 系统从外界吸收的热量和向外界放出的热量。在本题中, 设热机的工作物质为单原子分子气体。

解: 在 $a \rightarrow b$ 等压过程中, 有 $p_1 = p_2$ 。利用理想气体物态方程可求出 T_1 和 T_2 。

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1, \quad p_2 V_2 = \frac{m}{M} R T_2$$

得

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

所以

$$T_1 = \frac{M p_1 V_1}{m R} = 40 \text{ K}, \quad T_2 = \frac{V_2}{V_1} T_1 = 60 \text{ K}$$

(1) 在 $a \rightarrow b$ 等压膨胀过程中, 系统从外界吸收热量为

$$Q_p = \frac{m}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1) = 10.4 \times 10^3 \text{ J}$$

内能的增量为

$$\Delta E = \frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1) = 6.23 \times 10^3 \text{ J}$$

对外界做功为

$$A_p = Q_p - \Delta E = 4.17 \times 10^3 \text{ J}$$

在 $b \rightarrow c$ 等体降温过程中, $A_v = 0$, 系统向外界放出热量, 内能减小, 有

$$Q_V = \Delta E = \frac{m}{M} C_{V,m} (T_1 - T_2) = -6.23 \times 10^3 \text{ J}$$

在 $c \rightarrow a$ 等温压缩过程中, 系统向外界放出热量, 内能不变, $\Delta E = 0$, 有

$$Q_T = A_T = \frac{mRT_1}{M} \ln \frac{V_1}{V_2} = -3.37 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 在整个循环过程中, 系统从外界吸收热量为 Q_p , 向外界放出热量为 $|Q_V| + |Q_T|$, 所以循环效率为

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_V| + |Q_T|}{Q_p} = 1 - \frac{(6.23 + 3.37) \times 10^3 \text{ J}}{10.4 \times 10^3 \text{ J}} = 7.7\%$$

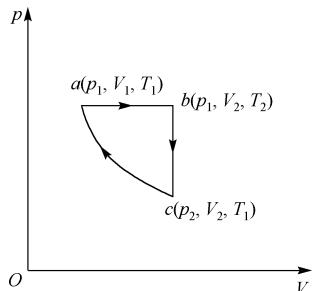


图 3.10 习题 3.37 图

3.37 一固态物质, 质量为 m , 熔点为 T_m , 熔解热为 L , 比热容为 c 。若对它缓慢加热, 使其温度从 T_0 上升为 T_m , 试求熵的变化。假设供给物质的热量恰好使它全部熔化。

分析: 固态物质吸热升温达熔点温度 T_m 后, 通常将在该温度上继续等温吸热并发生熔化。固态物质全部熔化前后的熵变为两个过程的熵变之和, 即固态吸热升温, 从 T_0 到 T_m ; 在 T_m 条件下继续等温吸热并熔化。

解: 固态物质吸热升温, 从 T_0 到 T_m 的熵变为

$$\Delta S_1 = \int_{T_0}^{T_m} \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_m} \frac{mc dT}{T} = mc \ln \frac{T_m}{T_0}$$

在 T_m 条件下继续等温吸热并熔化的熵变为

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T_m} = \frac{mL}{T_m}$$

总熵变为

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \frac{T_m}{T_0} + \frac{mL}{T_m}$$

3.38 把质量为 5 kg 、比热容为 $544 \text{ J} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}^{-1}$ 的铁棒加热到 300°C , 然后浸入一大桶 27°C 的水中。求在此冷却过程中铁棒的熵变。

分析: 把加热的铁棒浸入处于室温的水中后, 铁棒将向水传热而降低温度, 但“一大桶水”吸热后的水温并不会发生明显变化, 因而可以把“一大桶水”近似为恒温热源。把铁棒和“一大桶水”一起, 视为与外界没有热和功作用的孤立系统, 根据热力学第二定律, 在铁棒冷却至最终与水相同温度的不可逆过程中, 系统的熵将增加。

熵是态函数, 系统的熵变仅与系统的始、末状态有关而与过程无关。因此, 求不可逆过程的熵变, 可以在始、末状态之间设计任一可逆过程。此外, 系统的总熵变等于系统内各部分的熵变之和。

解: 把铁棒与“一大桶水”取作孤立系统时, 在铁棒冷却的过程中, 系统的总熵变为

$$\Delta S = \Delta S_{\text{铁}} + \Delta S_{\text{水}}$$

设铁棒的比热容为 c ，当铁棒的质量为 m ，温度变化 dT 时，吸收（或放出）的热量为 $dQ = cmdT$ 。设铁棒经历一可逆的降温过程，其温度连续地由 T_1 降为 T_2 ，在这过程中铁棒的熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{铁}} &= \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{cmdT}{T} = cm \ln \frac{T_2}{T_1} \\ &= 544 \times 5 \times \ln \frac{300}{573} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = -1760 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

“一大桶水”在等温吸热过程中的熵变为

$$\Delta S_{\text{水}} = \frac{\Delta Q}{T_2} = \frac{|cm\Delta T|}{T_2} = \frac{544 \times 5 \times (573 - 300)}{300} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = 2475.2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

系统的总熵变为

$$\Delta S = \Delta S_{\text{铁}} + \Delta S_{\text{水}} = 715.2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$$

第4章 静 电 场

静止电荷和运动电荷对周围空间所激发的电磁现象一般是不同的，相对观察者静止的电荷只激发电场，称为静电场，而相对观察者运动的电荷不但激发电场，还激发磁场，电场和磁场是相互关联的。电荷在电场和磁场中的相互作用是自然界已知的相互作用之一，也是人们认识得较深的一种相互作用。在对物质结构的认识过程中、在科学研究领域，都要涉及电磁相互作用。

从物质电结构理论的观点来看，任何物体都可能带电。根据导电性能的不同，物体可分为三类。第一类是导体：当物体的某部分带电后，如果能够把所带的电荷迅速地向其他部分分布开来，则这种物体称为导体，简称导体，各种金属和碱、酸或盐的溶液即化学上的电解质也是导体。第二类是绝缘体（电介质）：如果物体某部分带电后，其电荷只能停留在该部分，而不能显著地向其他部分分布，这种不导电的物体称为绝缘体，又称电介质，如玻璃、石蜡、硬橡胶、塑料、松香、丝绸、瓷器、纯水、干燥空气等都是电介质。由于电介质很难导电，所以它容易带电。第三类是半导体：其导电性能介于导体和绝缘体两者之间，这类物质称为半导体。金属、电介质、半导体在现代科学与技术中都是不可或缺的重要材料。

由此可知，理解和掌握电磁相互作用的规律，理解导体和电介质在电场中的表现和行为对科学研究有着重要的意义。在本章中我们主要研究真空中静电场的基本性质和规律，包括：真空中静电场的基本特性、电场对电荷的力的作用、电荷在电场中移动时电场力对电荷做功；静电场的两条基本定理——高斯定理和环路定理；引入描述电场的两个重要物理量——电场强度和电势，并讨论电场、电势的叠加原理，以及电场强度与电势梯度的关系；介绍导体和电介质在电场中的表现和行为。

4.1 学习要求

1. 静电场

- (1) 理解电场强度、电势、电势差的基本概念。
- (2) 掌握库仑定律、场强叠加原理、高斯定理、环路定理的基本规律。
- (3) 掌握简单几何形状带电体附近的场强、电势的计算方法。
- (4) 理解电场强度与电势梯度的关系。

2. 静电场中的电介质、导体、电容

- (1) 理解处于静电平衡下的导体的场强、电势和电荷的分布特征；并能从静电平衡条件来分析导体在静电场中的电荷分布和电场分布。

(2) 会分析、判断和计算简单、规则形状导体或少数导体组成的导体系统处于静电平衡时的场强、电势和电荷分布。

(3) 了解介质的极化和磁化的微观机理及特征、电极化强度矢量 \mathbf{P} 。理解电位移矢量 \mathbf{D} ，理解介质中的高斯定理，会用它们计算各向同性介质中的电位移矢量 \mathbf{D} 和电场强度 \mathbf{E} 的关系，并能由已知的电位移求相应的电场强度。

(4) 理解电容的定义及其物理意义。

(5) 理解电场的物质性以及电能密度的概念，在一些简单的对称情况下，能计算空间里储存的电场能量。

4.2 内容提要

1. 基本概念

(1) 电荷及电荷的相互作用

电荷：电荷是物质间发生电相互作用的一种属性。电荷有两种：正电荷和负电荷，同种电荷相斥，异种电荷相吸。

电荷的量子化：物体所带电荷的多少称为电荷量，也称为电量。在自然界中，任何电荷的电量总是某一基本单元的整数倍，电荷的基本单元就是一个电子或一个质子所带电量的绝对值（也称为元电荷），以 e 表示。在国际单位制（SI）中，电荷量的单位是库仑（C），2002 年元电荷的推荐值为

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

电荷量只能取分立值，这种不连续量值的特性称为电荷的量子化。

电荷守恒定律：实验指出，在一个孤立系统中，系统所具有的正负电荷的电量的代数和总保持不变，这一性质称为电荷守恒定律。

电荷的相对论不变性：带电体相对于不同的参考系，其运动速度及质量都可以不同，但电荷量却保持不变。这一性质称为电荷的相对论不变性。

点电荷：只考虑带电体的电荷量和位置，不考虑带电体的大小和形状，点电荷是一种理想模型。

电场力：电场对处于其中的其他电荷的作用力，电荷间的相互作用力本质上是各自的电场作用于对方的电场力。

静电场：相对于观察者静止的电荷在周围空间激发的电场。

(2) 库仑（C.A.deCoulomb）定律的矢量公式

库仑在 1785 年，通过实验总结出了库仑定律：在真空中两个静止点电荷间的相互作用（电）力，其方向沿两个点电荷的连线，同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引；其大小与两电荷的电量 q_1 和 q_2 的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，其数学表示为

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (4-1)$$

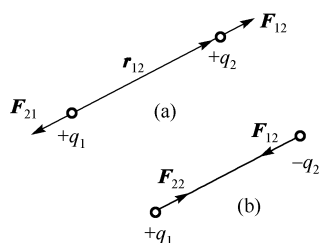


图 4.1 库仑定律示意图

式中 F_{12} 表示 q_1 对 q_2 的作用力, F_{21} 表示 q_2 对 q_1 的作用力, 如图 4.1(a)、(b)所示, 其中 $e_{12} = \frac{r_{12}}{r_{12}}$ 表示从 q_1 指向 q_2 的单位矢量。 k 是比例系数, 并由实验测得

$$k = 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} (\text{SI})$$

通常还引入另一常量 ϵ_0 来代替 k , 使 $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, 从而

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.8541 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \quad (4-2)$$

在式 (4-1) 中当 q_1 与 q_2 同号时, F_{12} 与 e_{12} 同向, 表明电荷 q_1 受 q_2 的斥力; 当 q_1 与 q_2 异号时, F_{12} 与 e_{12} 反向, 表明电荷 q_1 受 q_2 的引力。

式 (4-2) 称为真空的介电常数 (或真空电容率), 因此, 库仑定律又可表示为

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} e_{12} \quad (4-3)$$

在库仑定律表达式中引入 “ 4π ” 因子的做法, 称为单位制的有理化。这样做的结果虽然使库仑定律的形式变得复杂, 但却使以后经常用到的电磁学规律的表达式不出现 “ 4π ” 因子而变得简单。

库仑定律属于实验定律, 目前已证明距离 r 的二次幂在相当误差范围内库仑定律都是正确有效的。

(3) 电力叠加原理

实验表明, 点电荷之间的相互作用力满足叠加性。当空间存在多个点电荷时, 其中某一点电荷受到的静电力等于其余各点电荷单独作用的静电力的矢量和, 这一结论称为电力叠加原理。其数学形式为

$$\mathbf{F} = \sum_{i \neq j}^n \mathbf{F}_{ij} \quad \text{或} \quad \mathbf{F} = \sum_{i \neq j}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \mathbf{e}_{ij} \quad (4-4)$$

(4) 电场强度

实验证明, 置于电场中的电荷 q_0 (试验电荷), 所受电场力 \mathbf{F} 的大小与电量 q_0 成正比, 而比值 \mathbf{F} / q_0 则与试验电荷无关, 是一个仅由源电荷自身性质决定的物理量。用这个物理量作为描述电场的性质, 称为电场强度 (也称场强), 通常用 \mathbf{E} 表示场强, 定义为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (4-5)$$

上式表明, 电场中某场点上的电场强度等于置于该点的单位正电荷所受的电场力。在静电场中各场点的电场强度可能不同, 因此 \mathbf{E} 一般是场点坐标的矢量函数, 即为 $\mathbf{E}(x, y, z)$ 或 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 。在国际单位制中, 电场强度的单位为牛顿/库仑 ($\text{N} \cdot \text{C}^{-1}$) 或伏特/米 ($\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)。

点电荷系产生的电场中某点的电场强度等于各个点电荷单独存在时在该点产生的电场强度的矢量和, 这一结论称为电场强度叠加原理, 其数学形式为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_i}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (4-6)$$

从场的观点看, 叠加原理应属于电场的一个基本性质。

在电场强度的计算中, 可应用式(4-5)和式(4-6)分别计算点电荷和点电荷系的电场强度, 对于连续分布的带电体的电场强度在后面电场强度的计算中再介绍。

(5) 电势与电势差

电势: 电场中点 a 的电势定义为

$$V_a = \int_a^{\text{零势点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4-7)$$

点 a 的电势等于将单位正电荷自点 a 沿任意路径 l 移至电势零点时, 电场力所做的功或等于电场强度从点 a 到电势零点沿任意路径的线积分。

电势差: 电场中任意两场点 a 和 b 间的电势差为

$$V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (4-8)$$

也称为两点间的电压, 其意义是: a 、 b 间的电势差等于把单位正电荷由点 a 沿任意路径移至点 b 时, 电场力所做的功。

点电荷系的电势: 在点电荷系的静电场中, 某点的电势等于每一个电荷单独在该点时所激发的电势的代数和。这个性质称为电势的叠加原理。数学形式为

$$V_p = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (4-9)$$

注意: 式(4-6)、式(4-9)分别为电场强度和电势叠加原理的数学形式, 但前者为矢量叠加, 后者为标量叠加。

(6) 静电场中的导体与静电平衡

① 静电平衡: 一个不带电的导体放入静电场中, 外电场引起导体中正、负电荷的重新分布, 结果使导体一端带正电荷, 另一端带负电荷。导体表面所带的这种电荷称为感应电荷, 这种现象称为静电感应。

② 电极化强度矢量 \mathbf{P} : 为了描述电介质的极化程度, 引入极化强度矢量 \mathbf{P} , 极化强度的定义是单位体积内的分子电偶极矩的矢量和。以 \mathbf{p}_i 表示在电介质中某一小体积 ΔV 内的某个分子的电偶极矩, 则该处的极化强度矢量 \mathbf{P} 为

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V} \quad (4-10)$$

③ 电位移矢量 \mathbf{D} : 电位移矢量是引入的一个辅助物理量, 定义为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4-11)$$

\mathbf{D} 没有实际的物理意义, 它是描述电场的一个辅助物理量。引进 \mathbf{D} 的优点在于计算通过任一闭合曲面的电通量时, 可以不考虑极化电荷的分布。

④ 电容：电容器是由两个用电介质（或真空）隔开的金属导体组成的，这两个导体称为电容器的两个极板。电容器在工作时，它的两个极板相对的两个表面上总是分别带上等量异号的电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 。这时两极板间有一定的电势差 ΔU ，这电势差又称为电容器的电压，用 V 表示。定义电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{V} \quad (4-12)$$

从上式可以看出，在电势差（即电压）相同的条件下，电容 C 越大的电容器，所储存的电量越多。这说明电容是反映电容器储存电荷本领大小的物理量。在国际单位制（SI）中，电容的单位是库/伏（ $\text{C} \cdot \text{V}^{-1}$ ），称为法拉（F）。

⑤ 电能密度：考虑到能量是储存在电场中的，则电场的能量密度（即单位体积内储存的电场能）公式为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED \quad (4-13)$$

2. 静电场的高斯定理与环路定理

(1) 电场线与电通量

电场线：为了形象地描绘电场在空间的分布，可以画出电场线图。电场线是按下述规定在电场中画出的一系列假想的曲线：曲线上每一点的切线方向表示该点场强的方向，曲线的疏密表示场强的大小。定量地说，为了表示电场中某点场强的大小，设想通过该点画一个垂直于电场方向的面元 dS_{\perp} ，如图 4.2 所示，通过此面元画 $d\Phi_e$ 条电场线，使得

$$E = \frac{d\Phi_e}{dS_{\perp}} \quad (4-14)$$

即电场中某点电场强度的大小等于通过该点附近垂直于电场方向的单位面积的电场线条数。

静电场的电场线有下述特征：

- ① 电场线起自正电荷，止于负电荷，或延伸到无穷远处；
- ② 电场线不形成闭合曲线；
- ③ 没有电荷处，两条电场线不会相交，也不会中断。

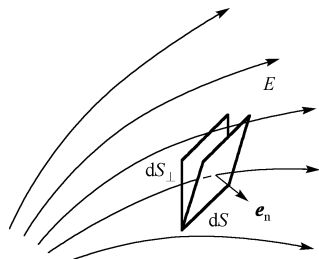


图 4.2 电场线数密度与场强大小的关系

电通量：通过电场中任一给定曲面的电场线总数，称为通过该曲面的电通量（电场强度通量），用 Φ_e 表示。如图 4.3 所示，在电场中任取一曲面 S ，为计算通过该曲面的电通量，可将曲面 S 分割成许多小面元 dS ，并用 e_n 代表垂直于 dS 面元的正法向单位矢量。根据式（4-14），通过 dS 的电场线的条数即电通量应为

$$d\Phi_e = E dS_{\perp} = E dS \cos \theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n dS \quad (4-15)$$

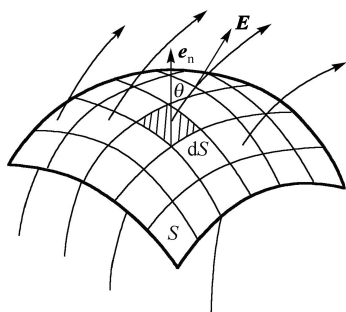


图 4.3 通过任意曲面的电通量

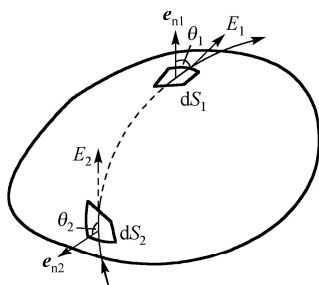


图 4.4 通过封闭曲面的电通量

定义矢量面元 $d\mathbf{S} = dS\mathbf{e}_n$ ，其大小就等于 dS 面的面积，方向为 dS 面的正法线方向。由矢量标积的定义，通过面元 dS 的电通量——式 (4-15) 又可写为

$$d\Phi_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n dS = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-16)$$

注意，由式 (4-16) 决定的电通量 $d\Phi_e$ 有正、负之分，当 $0 \leq \theta < \pi/2$ 时， $d\Phi_e$ 为正；当 $\pi/2 < \theta \leq \pi$ 时， $d\Phi_e$ 为负。

通过整个曲面 S 的电通量应该是通过所有面积元的电通量之和，对整个曲面 S 求积分，即得

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-17)$$

通过一个封闭曲面 S 的电通量，如图 4.4 所示，可表示为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (4-18)$$

积分符号 “ \oint ” 表示对整个封闭曲面进行面积分。

(2) 静电场的高斯定理

在真空中，通过任意闭合曲面（高斯面）的电场强度通量等于该高斯曲面所包围的电荷量的代数和除以 ϵ_0 ，定理的数学形式为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i \quad (4-19)$$

式中， $\sum q_i$ 表示在封闭曲面内的电量的代数和。

思考题：怎样证明高斯定理？如果库仑力不是精确地与电荷间的距离成平方反比关系，那么高斯定理成立吗？

对高斯定理的理解应注意以下几点：

① 高斯定理表达式左方的场 \mathbf{E} 是曲面上各点的场强，它是由全部电荷（既包括封闭曲面内又包括封闭曲面外的电荷）共同产生的合场强，并非只由封闭曲面内的电荷 $\sum q_i$ 所产生；

② 通过封闭曲面的总电通量只决定于它所包围的电荷，即只有封闭曲面**内部**的电荷才对这一总电通量有贡献，封闭曲面外部电荷对总电通量无贡献；

③高斯定理表明静电场是有源场, 这从电力线角度很容易理解。

高斯定理是以库仑定律为基础建立的, 但库仑定律只适用于静电场, 而高斯定理不仅适用于静止电荷和静电场, 也适用于运动电荷和变化的电场, 它是电磁场的基本定理之一。

(3) 静电场的环路定理

静电场的环路定理的数学形式为

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4-20)$$

环路定理指出: 在静电场中, 电场强度的环流等于零。或者说, 在静电场中作用在单位正电荷上的电场力, 沿一闭合路径对该电荷所做的功等于零。它是反映静电场基本特性的又一个重要规律, 任何力场, 只要具备场强的环流为零的特性, 该场就称为保守场, 或称为势场。综合静电场的高斯定理和环路定理, 可知静电场是有源的保守力场, 又由于电场线是不闭合的, 即不形成旋涡的, 所以静电场属于无旋场。

3. 电场强度与电势梯度的关系

(1) 等势面

在电场中, 电势相等的点所组成的曲面称为等势面, 不同的电荷分布的电场具有不同形状的等势面, 相邻两等势面的电势差相等。等势面与场强之间有如下的一般关系: ①等势面与电场线处处正交; 电场线的方向, 亦即电场强度的方向, 总是指向电势降低的方向; ②等势面分布较密的地方, 电场强度较大; ③电荷沿等势面移动时, 电场力不做功。

注意: 实际的等势面是一些三维的曲面。

(2) 电场强度与电势梯度的关系

设在静电场中, 选取两个十分接近的等势面 1 和 2, 如图 4.5 所示, 其电势分别为 U 和 $U+dU$, 并设 $dU > 0$ 。在等势面 1 上任取一点 P_1 , 过 P_1 作等势面的法线, 并规定沿电势升高的方向作为法线的正方向, 用 \mathbf{e}_n 代表沿此方向的单位矢量。由于电场强度 \mathbf{E} 与等势面垂直, 并指向电势降低的方向, 所以场强 \mathbf{E} 与 \mathbf{e}_n 反向。法线与面 2 相交于 P_2 点。 P_1 和 P_2 间的距离 dn 是两面间的最短距离。 $d\mathbf{l}$ 代表 P_1 点距等势面 2 上的任一点 P_3 的距离, $d\mathbf{l}$ 的方向

如图 4.5 所示。

由于 P_1 和 P_3 是十分接近的两点, 故这两点的电势差

$$U - (U + dU) = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

若以 E_l 代表 \mathbf{E} 沿 $d\mathbf{l}$ 方向上的分量, 可得 $-dU = E_l d\mathbf{l}$

$$E_l = -\frac{dU}{d\mathbf{l}}$$

图 4.5 电场强度与电势
梯度关系的示意图

上式说明电势沿 $d\mathbf{l}$ 方向上的空间变化率与电场强度在 $d\mathbf{l}$ 方向上的分量大小相等, 方向相反。

若取 $d\mathbf{l}$ 沿等势面切向, 则电场强度沿此方向的分量为零, 即电势的空间变化率为零; 如果取 $d\mathbf{l}$ 沿 \mathbf{e}_n 方向, 而己知电场强度的法向分量即大小等于 E , 则应有 $E = -\frac{\partial U}{\partial n}$, 进一步写成矢量式

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial U}{\partial n} \mathbf{e}_n \quad (4-21)$$

定义矢量 $\frac{\partial U}{\partial n} \mathbf{e}_n$ 为电势梯度。电势梯度是一个矢量，它的大小等于电势沿等势面法向的空间变化率，其方向沿等势面的法向，指向电势增加的方向。式 (4-21) 表明，静电场中任何一点的电场强度 \mathbf{E} 等于该点电势梯度矢量的负值。

通常将式 (4-21) 用直角坐标系的分量形式来表示。取 $d\mathbf{l}$ 分别沿直角坐标 x 、 y 、 z 轴的方向，则应得到

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

故可将式 (4-21) 表示成

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

引入梯度算子 $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ ，则上式可缩写成

$$\mathbf{E} = -\nabla U \quad (4-22)$$

由式 (4-21) 可知场强的单位为 $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ 表示，它与场强的另一个单位 $\text{N} \cdot \text{C}^{-1}$ 是等价的。

4. 电场强度的计算

(1) 应用点电荷电场强度公式和场强叠加原理进行计算

对于离散分布电荷可应用式 (4-5) 和式 (4-6) 分别计算点电荷和点电荷系的电场强度。

对于电荷连续分布（宏观物体所带电量远远大于电荷单元 e 时，可以认为电荷连续地分布在带电体上）的带电体电场的电场强度，一般处理方法是将电荷连续分布的带电体上的电荷看成是由许多无限小的电荷元 dq 组成的，而每个电荷元都可以当作点电荷处理。设其中任何一个电荷元 dq 在 p 点产生的场强为 $d\mathbf{E}$ ，根据式 (4-5) 场点 p 的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

式中， r 是从电荷元 dq 到场点 p 的距离，而 \mathbf{e}_r 是这一方向上的单位矢量。整个带电体在 p 点所产生的总场强可用积分计算

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (4-23)$$

积分遍及整个带电体。注意式 (4-23) 是矢量积分，通常在直角坐标系下进行，首先将 $d\mathbf{E}$ 沿坐标轴进行分解

$$d\mathbf{E} = dE_x \mathbf{i} + dE_y \mathbf{j} + dE_z \mathbf{k}$$

然后对每个分量积分 $E_x = \int dE_x$ ， $E_y = \int dE_y$ ， $E_z = \int dE_z$ ，于是 p 点的场强

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \quad (4-24)$$

由上述可知, 对于由许多电荷组成的电荷系来说, 如果电荷分布已知, 那么根据场强叠加原理, 并利用点电荷场强公式, 就可求出电场中任意点的场强, 也就是求出电场的空间分布。

(2) 应用高斯定理进行计算

当电荷分布具有某些特殊的对称性, 从而使相应的电场也具有一定的对称性时, 就有可能应用高斯定理来计算电场强度 \mathbf{E} 。具体应用高斯定理求电场强度 \mathbf{E} 时, 应注意如下几点: 首先选择的高斯面要通过待求电场强度 \mathbf{E} 的场点 p ; 其次使电场强度垂直于高斯面, 且大小处处相等; 或者在高斯面上的某一部分电场强度处处相等且方向与该面垂直, 另一部分上电场强度与该面平行, 因而通过的 \mathbf{E} 的通量为零。由于用高斯面有如上限制, 因此直接应用高斯定理只能求某些对称分布电场的电场强度。

(3) 应用电场强度与电势梯度的关系

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial U}{\partial n} \mathbf{e}_n \quad (4-25)$$

通常将式 (4-25) 用直角坐标分量形式来表示。取 $d\mathbf{l}$ 分别沿直角坐标 x 、 y 、 z 轴的方向, 则应得到

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

故可将式 (4-25) 表示成

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

5. 电势的计算

(1) 已知场强计算电势

由电势的定义式 (4-7) 计算 $U_a = \int_a^{\text{零势点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, 从场点 a 到零势点可选取任一方便的路径进行积分。

(2) 利用电势叠加原理计算电势

这种方法是从点电荷电场的电势出发, 应用电势的叠加原理式 (4-9) 来计算任一电荷系电场的电势。

对于电荷连续分布的带电体, 可将带电体分为许多电荷元 dq , 把每个电荷元当成点电荷, 其电势为

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

根据电势叠加原理, 整个带电体在电场中某点产生的电势可由下述积分求出:

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4-26)$$

上式积分是对整个电荷所在的空间进行积分计算的。

6. 导体的静电平衡

(1) 导体静电平衡条件

导体静电平衡的必要条件就是导体内任一点的电场强度都等于零，即导体的静电平衡状态是指导体内部和表面都没有电荷做定向运动的状态。

如果将导体置于静电场中，导体中的自由电子将受到静电场的作用而产生定向运动，这一运动将改变导体上的电荷分布：原来呈中性的导体出现一些部位带正电，另一些部位带负电的情况，这种现象称为**静电感应**。而原来带电的导体，由于静电感应，导体上的电荷将重新分布。这一电荷分布的变化又将反过来改变导体内部和周围的电场分布。这种电荷和电场分布的变化将一直进行到导体达到静电平衡状态时为止，但这一过程是十分短暂的，通常只经历约 $10^{-14} \sim 10^{-13}$ s。

(2) 静电平衡状态下的导体所具有的性质

① 导体内部的场强处处为零，导体表面外紧邻导体处任何一点的场强方向垂直于该点的导体表面。

② 导体是等势体，其表面是等势面，且表面电势与内部电势相等。

(3) 静电平衡下导体上的电荷分布

当导体处于静电平衡状态，导体内部和表面不再有电荷做定向运动，导体上的电荷分布达到了稳定状态，具有以下特征：

① 实心导体内部各处净电荷为零，电荷只分布在导体表面上；

② 孤立导体处于静电平衡时，它的表面各处的面电荷密度与表面各处的曲率有关，曲率越大的地方，面电荷密度也越大；

③ 导体内部有空腔，若空腔内无其他带电体，则在静电平衡时，不仅导体内部处处没有净电荷，而且空腔内表面上各处的面电荷密度也为零，电荷只能分布在导体的外表面上；

④ 导体内部有空腔，并且空腔内有其他带电体，设带电体带电量为 q ，则在静电平衡时，空腔内表面上分布有 $-q$ 的感应电荷，外表面上分布有 $Q+q$ 的电荷， Q 是空腔导体原来所带电荷。

7. 静电屏蔽

一个接地的空心金属导体隔离了放在它内腔中的带电体与外界带电体之间的静电作用，这就是静电屏蔽的原理。这样的空心金属导体，称它为静电屏。（注：应当指出，相当密集的金属网，对于距离比金属网缝隙大得多的地方来说，可以代替金属片作为静电屏。）静电屏在实际中应用广泛。

8. 电介质的电结构

电介质的主要特征是它的分子中电子被原子核束缚得很紧，即使在外电场作用下，电子一般只能相对于原子核有一微观的位移，而不像导体中的电子那样，能够脱离所属原子

而成为自由电子,并可做宏观运动。因而电介质在宏观上几乎没有自由电荷,其导电性很差,故亦称为绝缘体。并且,在外电场作用下达到静电平衡时,电介质内部的场强也可以不等于零。

从分子内正、负电荷中心的分布来看,电介质可分为两类。一类电介质,如盐酸(HCl)、水(H₂O)、氨(NH₃)、甲醇(CH₃OH)等,分子内正、负电荷的中心不相重合,其间有一定距离,这类分子称为有极分子,如图4.6(a)所示。其电矩为

$$p_e = ql \quad (4-27)$$

式中 l 的方向自负电荷中心指向正电荷中心, l 与电偶极矩同方向,称为分子电矩;整块的有极分子电介质,可以看成无数分子电矩的集合体。

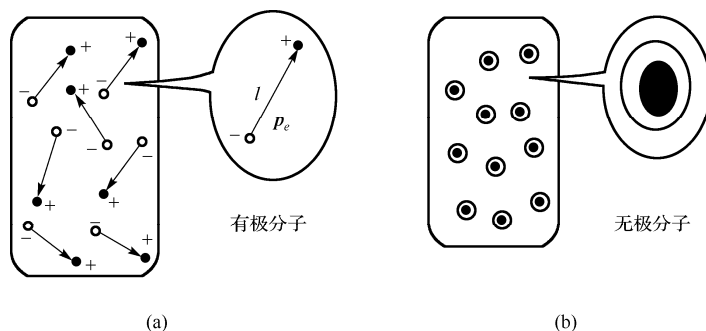


图4.6 有极分子与无极分子示意图

另一类电介质,如氦(He)、氢(H₂)、甲烷(CH₄)等,分子内正、负电荷中心是重合的,因而, $|l|=0$ 故分子电矩 $|p_e|=0$ 。这类分子称为无极分子。无极分子与整块的无极分子电介质如图4.6(b)所示。

9. 电介质的极化及其描述

电介质不同于导体,在理想电介质的分子、原子中,正、负电荷束缚很紧,没有可以自由运动的电荷,所以理想电介质不导电,是绝缘体。

① 电介质的极化:在外电场的作用下,均匀电介质的表面出现极化电荷(也称为束缚电荷)的现象。

② 极化强度与电场强度的关系:实验证明,当电介质中的电场强度不是特别强的情况下,其极化强度 \mathbf{P} 矢量的大小与电场强度 \mathbf{E} 的大小成正比,方向与 \mathbf{E} 的方向相同,其关系式可以写为

$$\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} \quad (4-28)$$

③ 极化强度与极化面电荷密度的关系为

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P \cos \theta = P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n \quad (4-29)$$

式中, σ' 为极化介质表面某处极化面电荷密度, dq' 为该处面元 dS 上的极化电荷, θ 为极化强度 \mathbf{P} 与介质表面法向单位矢量 \mathbf{e}_n 间的夹角。上式表明极化介质表面某处极化面电荷密度 σ' 的大小与该处极化强度 \mathbf{P} 在表面法向上的分量值相等。

显然, 当 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ 时, 表面上呈正极化电荷; 当 $90 < \theta \leq 180^\circ$ 时, 表面上呈负极化电荷; 而在 $\theta = 90^\circ$ 的那些介质表面, 则无极化电荷出现。

*10. 有电介质存在时的电场

① 当电场中存在电介质时, 通常用 q_0 表示产生外电场的源电荷, 称为自由电荷, 介质上的极化电荷则用 q' 表示。电介质在外电场中发生极化且达到稳定之后, q_0 和 q' 在空间的分布将保持恒定, 这时空间任一点的电场强度 \mathbf{E} 应是自由电荷 q_0 产生的电场 \mathbf{E}_0 和极化电荷 q' 产生的附加电场 \mathbf{E}' 的矢量和

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' \quad (4-30)$$

实验证明, 对于各向同性材料, 在 \mathbf{E}_0 不太强的情况下, \mathbf{P} 与 \mathbf{E} 成正比, 即

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (4-31)$$

式中 χ_e 为一纯数, 称为**介质的极化率**。它与介质的相对介电常数之间的关系为

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

② 电介质中的高斯定理表示为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0in} \quad (4-32)$$

此式说明通过任意封闭曲面的电位移通量等于该封闭曲面包围的自由电荷的代数和 $\sum q_{0in}$, 称为介质中的高斯定理。它是存在介质情况下的普遍关系式。

11. 电容、电场的能量

(1) 电容器的电容定义

电容器的电容定义为

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U} \quad (4-33)$$

式中, $U = V_1 - V_2$ 为电容器两极板的电势差, Q 为一个极板所带电荷量的数值, 其中一个带正电, 另一个带负电。电容器的主要特点是: 当电容器的两极板分别带有等量而异号的电荷时, 电场集中在两个极板之间的空间, 如同心球壳组成的电容器, 其电场在两个球壳之间的空间; 两“无限大”平行板电容器的电场在两平行板之间, 等等。一般情况下, 电容器两极板间的距离远小于电容器本身的尺寸, 因而通常在这种情况下可忽略边缘效应。对于由给定导体组和电介质构成的电容器, 其电容值是确定的, 只取决于导体组的几何形状和电介质的电容率。

(2) 几种特殊形状导体组电容器的电容

孤立导体的电容: 在真空中, 一个带有电量 Q 的孤立导体, 其电势为 U 。实验表明, 当电量 Q 增加时, 导体的电势也增加, 而电量 Q 与电势 U 的比值却保持不变; 对于形状和大小不同的导体要达到相同的电势, 它们所带的电量是不同的。由此可见, 孤立导体的电量与电势的比值只决定于导体的形状和大小, 称此比值为该孤立导体的电容 C , 即

$$C = \frac{Q}{U} \quad (4-34)$$

例如,真空中半径为 R 的孤立导体球,其电容为

$$C = \frac{Q}{Q/4\pi\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon_0 R$$

可见,孤立导体球的电容正比于球的半径,与所带电量无关。下面考虑电容器的电容。

平行板电容器: 平行板电容器是由大小相同的两块平行金属板组成的。以 S 表示两平行金属板相对着的表面积,以 d 表示两平行板之间的距离,设两平行板间充满了相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。现假设两平行板相对的两个表面分别带有 $+Q$ 和 $-Q$ 的电荷。忽略边缘效应,两平行板间的电场

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

两平行板间的电压差为

$$V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

所以平行板电容器的电容

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \quad (4-35)$$

在实用上,常通过改变极板相对面积的大小或改变极板间距离的方法,来改变电容器的电容。还可以改变极板间电介质的种类来改变电容,从上式可以看出板间充满电介质时的电容比板间为真空 ($\epsilon_r = 1$) 时的电容大 ϵ_r 倍。

圆柱形电容器: 圆柱形电容器由两个长直同轴的金属圆筒组成,如图 4.7 所示。设筒的长度为 l ,两筒的半径分别 R_1 和 R_2 ,两筒之间充满相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。为了求出圆柱形电容器的电容,假设外筒单位长度带电荷 $-\lambda$,内筒单位长度带电荷 $+\lambda$ 。忽略两端的边缘效应,两筒间距离轴线为 r 处的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$$

场强的方向垂直于轴线而沿径向,由此可以求出两圆筒间的电压为

$$V = \int E \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

所以圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{\lambda L}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)} \quad (4-36)$$

球形电容器: 球形电容器是由两个同心的导体球壳组成,两球壳间充满相对介电常数

为 ε_r 的电介质, 半径分别为 R_1 和 R_2 , 如图 4.8 所示。假设两球壳的相对的两表面分别带电荷 $+Q$ 和 $-Q$, 则两球壳间的电势差

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$

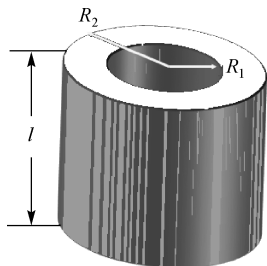


图 4.7 圆柱形电容器示意图

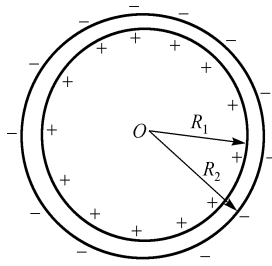


图 4.8 球形电容器示意图

所以球形电容器的电容为

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (4-37)$$

(3) 电容器的串联和并联

电容器的主要性能指标, 一个是它的电容的大小, 另一个是它的耐压。当单个的电容器不能满足要求时, 就可用串联和并联的方法来解决。

① 电容器串联时, 各电容器上所带的电量相等, 而串联电容器组的总电量就等于各电容器的电量, 总电压等于各个电容器的电压之和, 即

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots$$

串联电容器组的总电容

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \quad (4-38)$$

② 电容器并联时, 各电容器的电压相等, 而并联电容器组所带的总电量为各个电容器所带的电量之和, 即

$$CV = C_1V + C_2V + \dots$$

并联电容器组的总电容

$$C = C_1 + C_2 + \dots \quad (4-39)$$

并联与串联相比, 并联时总电容增大了, 但因每个电容器都直接接到电压源上, 所以电容器组的耐压受到耐压最低的那个电容器的限制。串联时, 总电容比每个电容器的电容都小, 但由于总电压分配到各个电容器上, 所以电容器组的耐压提高了。

(4) 电场的能量

电容器的储能公式为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU \quad (4-40)$$

电容器的充电过程也是电容器极板间的电场的建立过程。事实已证明, 能量是储存在电容器的两极板间的电场中的。

考虑到能量是储存在电场中的, 于是得到电场的能量密度(即单位体积内储存的电场能)公式为

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} ED \quad (4-41)$$

它是计算电场能量密度的普遍公式, 不论是均匀电场还是非均匀电场以及静电场还是变化电场都适用。对于非均匀电场, w_e 应为空间坐标的函数, 于是电场的能量为

$$W_e = \int w_e dV = \int \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV \quad (4-42)$$

积分应遍及电场所在的整个空间。

4.3 重点难点分析

1. 本章重点

静电场是电磁学的基础, 以“点电荷”及“场”等为模型, 研究静电场的基本特性。即电荷与电荷之间存在电场、电场对电荷有力的作用、在电场中移动电荷电场力要做功。与质点运动学类似, 也要确定空间电磁状态分布的情况。也就是说, 在电场中如果某点的电场强度 \mathbf{E} 和电势 V 已知, 那么该场点的状态就确定了。因此, 求解静电场中给定点的电场强度和电势以及电场强度和电势的空间分布是静电场部分研究的重点。具体地, 掌握库仑定律、电场强度、电通量、电势、电势差等基本概念; 灵活地应用场强叠加原理、高斯定理等基本规律, 对电场强度、电通量、电势进行计算; 掌握场强与电势梯度的关系。

静电场中的电介质、导体、电容部分重点是在理解静电平衡下导体的场强、电势和电荷分布特征概念的基础上, 掌握并学会分析导体在静电场中的电荷分布和电场、电势的分布; 能够正确理解电介质在静电场中的极化现象及电介质对静电场的影响; 并能通过对电介质中电场的分析, 得出电介质中的高斯定理; 能熟练计算一些简单常见的物体的电容, 熟练计算电场的能量。

2. 本章难点

难点一是对“点电荷”、“场”等模型的理解; 难点二是对描述电场的两个基本物理量(电场强度和电势)的求解。而电场强度是矢量函数, 电势是标量函数, 两者求解的难易程度是不同的。一般情况下, 对电场强度和电势的求解需应用(电场强度、电势)叠加原理, 而在应用叠加原理时, “选取”电荷元 dq 比较困难。对于电荷元 dq 选取的具体方法是: ①要能对应地写出 $d\mathbf{E}$ 和 dV ; ②积分 $\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$ 或 $V = \int dV$ 要能进行计算; ③可利用一些简单带电体(线 $dq = \lambda dl$ 、面 $dq = \sigma dS$ 、体 $dq = \rho dV$) 的电场强度和电势的已有结果, 写出 $d\mathbf{E}$ 和 dV 的表达式, 然后进行积分计算。

注意: ①只有在带电体具有对称情况时, 才能直接应用高斯定理求出带电体相应的电场强度分布; ②环路定理的应用中, 注意积分是对任意路径的选择; ③应用 $\mathbf{E} = -\nabla V = -\text{grad} V$ 时, 因为电势是标量, 通常标量计算比较简便, 因此在求得电势分布后, 只需进行空间导数运算便可算出电场强度的各个分量, 这样就可避免较复杂的矢量运算。

静电场中的电介质、导体、电容部分难点在于分析、判断和计算带电导体或导体组成的导体系的电场强度和电势分布。明晰导体平衡条件及导体处于静电平衡时的性质及概念, 如静电平衡时导体内部电场强度为零, 电势并不一定为零。接地导体电势为零, 但电荷不一定为零等性质。这些性质很容易混淆而产生判断出错。解决的方法: 一是准确判断静电平衡时电荷的分布; 二是正确应用场强(电场、电势)叠加原理及高斯定理; 三是要熟练掌握电场强度、电势的计算方法和步骤。

4.4 精选例题与习题解答

1. 精选例题

例 4-1 求电偶极子中垂线上任一点的电场强度。

分析: 两个大小相等的正负电荷 $+q$ 和 $-q$, 当两者之间的距离 l 比从它们到所讨论的场点的距离小得多时, 这个电荷系统就称为电偶极子, 如图 4.9 所示。连接两电荷的直线称为电偶极子的轴线, 取从负电荷到正电荷的矢径 \mathbf{l} 的方向作为轴线的正方向, 电量 q 与矢径 \mathbf{l} 的乘积定义为电偶极矩或电矩, 电矩是矢量, 用 \mathbf{p} 表示, 即 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ 。

解: 令中垂线上 P 点到电偶极子的中心 O 的距离为 r ($r \gg l$)。

电荷 $+q$ 和 $-q$ 在 P 点所产生的场强 \mathbf{E}_+ 和 \mathbf{E}_- 的大小分别为

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}, \quad E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + \frac{l^2}{4}}$$

方向分别在 $+q$ 和 $-q$ 到 P 点的连线上, 前者背向正电荷, 后者指向负电荷。设连线与电偶极子轴线之间的夹角为 α , 可知 P 点的总场强 \mathbf{E}_P 为

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)} \cos \alpha \cdot \frac{\mathbf{l}}{l}$$

因 $\cos \alpha = \frac{l}{2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$, 所以

$$\mathbf{E}_P = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

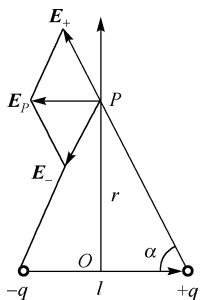


图 4.9 电偶极子的电场

根据 $r \gg l$ 的条件, 有 $\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \approx r^3$, 由此可得

$$E_P = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}$$

式中负号表明电偶极子中垂线上距离电偶极子中心较远处各点的电场强度与电偶极子的电矩方向相反。

例 4-2 如图 4.10 所示, 有一均匀带电直线, 长为 L , 电量为 q , 设线外任一场点 P 离开直线的垂直距离为 a , P 点和直线两端的连线与直线之间的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 。求 P 点的场强。

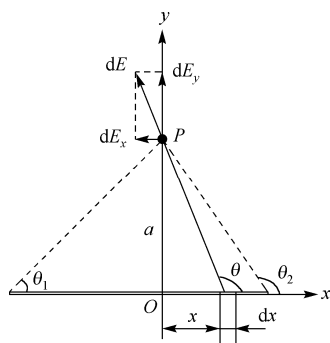


图 4.10 例 4-2 图

分析: 首先求出带电直线上任一线元所带电荷在 P 点处激发的电场, 然后再用积分方法求出整个带电直线在 P 点处激发的电场, 由于电场是矢量, 所以用分量的方法进行计算。

解: 此类题可按下列步骤求解

(1) 选定便于计算的坐标系, 确定电荷元 dq 。取坐标如图 4.10 所示, 在距原点 O 为 x 处取长为 dx 的线元, 则相应的电荷元

$$dq = \frac{q}{L} dx = \lambda dx, \quad \lambda = \frac{q}{L}$$

(2) 将 dq 作为点电荷, 列出它在 P 点的场强 dE , 其大小

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

不同位置的电荷元在 P 点产生的场强 dE 有不同的方向, 它们在 x 轴和 y 轴的两个分量为

$$dE_x = dE \cos \theta$$

$$dE_y = dE \sin \theta$$

(3) 统一积分变量, 定积分限, 完成积分, 得到所求场强分量

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cos \theta = \int \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \sin \theta = \int \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta$$

在上述积分的被积函数中, r 、 θ 和 x 均为变量, 并有如下关系:

$$r = a / \sin \theta, \quad x = a \tan \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = -a \cot \theta, \quad dx = a d\theta / \sin^2 \theta$$

将其代入上面 E_x 、 E_y 的表达式, 将被积函数统一为单一变量 θ 的函数, 并确定积分限 θ_1 和 θ_2 进行积分, 得到

$$E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

于是 P 点的场强

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j}$$

讨论:

(1) 若 $a \ll L$, 即 P 点极靠近直线, 这时带电直线可看作无限长, 这里将 $\theta_1 = 0$ 和 $\theta_2 = \pi$ 代入得

$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

(2) 对于 $a \rightarrow 0$, 则有两种情形, 一是 P 点逐渐靠近带电直导线, 二是 P 点处于带电直线的延长线上, 这两种情形都不能直接应用上述计算结果。在第一种情形中得到无限大的场强, 是无意义的; 第二种情形中也得不到确定的结果。这种情况, 可按带电体在场点激发电场强度公式直接计算, 参见习题 4.12 的分析与解。

例 4-3 半径为 R 的均匀带电细圆环, 电量为 q 。求圆环轴线上任一点的场强。

分析: 建立如图 4.11 所示的坐标, 在环上取一线元 dl , 其所带电量为 dq , 它在圆环轴线上 P 点处的电场强度 $d\mathbf{E}$, 由此求出 $d\mathbf{E}$ 沿平行于 x 轴的分量 dE_{\parallel} 和垂直于 x 的分量 dE_{\perp} , 根据对称性, 不难发现各电荷元的电场强度在垂直于 Ox 轴方向上的分矢量 $d\mathbf{E}_{\perp}$ 相互抵消。所以带电圆环在 P 点处激发的电场强度是平行于 Ox 轴的那些分矢量 $d\mathbf{E}_{\parallel}$ 的总和。

解: 设场点 P 距原点 (环心) 为 x , 在环上取一线元 dl , 其所带电量为 dq , 且为

$$dq = \frac{q}{2\pi R} dl = \lambda dl$$

dq 在 P 点产生场强 $d\mathbf{E}$ 的大小

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由于圆环对 P 点是轴对称的, 故可将 $d\mathbf{E}$ 分解为平行于 x 轴的分量 dE_{\parallel} 和垂直于 x 轴的分量 dE_{\perp} 。各个电荷元在 P 点的垂直于 x 轴的分量 dE_{\perp} 是相互抵消的, 故可直接得到

$$E_{\perp} = 0$$

因此 P 点的场强大小

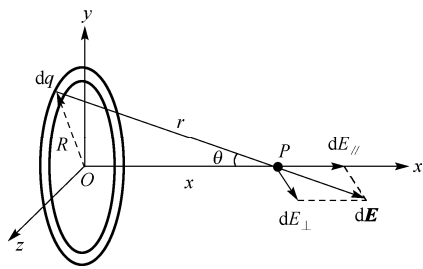


图 4.11 例 4-3 图

$$E = \int dE_{//} = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$$

$$= \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

而 \mathbf{E} 的方向沿 x 轴的方向。

若 $x=0$, 则 $\mathbf{E}=0$, 即在环心上的场强为零。又若 $x \gg R$, 即 P 点远离圆环时, $(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \approx x^3$, 则上式可近似地写为

$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

可见这时与环上电荷全部集中在环心处的一个点电荷所激发的电场强度相同。进一步讨论可知, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 也有 $\mathbf{E}=0$ 。这说明在 $x=0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 之间某个位置电场强度 \mathbf{E} 有极大值, 读者可自行讨论。

例 4-4 有一均匀带电的薄圆盘, 半径为 R , 电荷面密度为 σ 。求圆盘轴线上任一点的场强。

分析: 因为电荷分布在二维圆盘面上, 若从点电荷场强出发, 就要对电荷元进行二重积分计算, 但如果巧妙应用例 4-3 的结论, 也可只做一重积分运算。下面用两种方法求解。

解法 1: 将带电圆盘视为是以 O 为圆心, 半径为 r , 宽为 dr 的许多带电细圆环组成, 如图 4.12(a)所示。任一细圆环的面积可为 $2\pi r dr$, 所带电荷量为

$$dq = 2\pi\sigma r dr$$

利用例 4-3 得到的带电细圆环在轴线上所激发的场强公式, 得到该电荷元 dq 在 P 点所激发的场强, 即

$$dE = \frac{2\pi\sigma r dr \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}$$

因此, 带电圆盘在 P 点的场强大小

$$E = \int dE = \frac{2\pi\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

可见, 由于利用了带电圆环的场强公式, 从而省去了一重积分的计算。

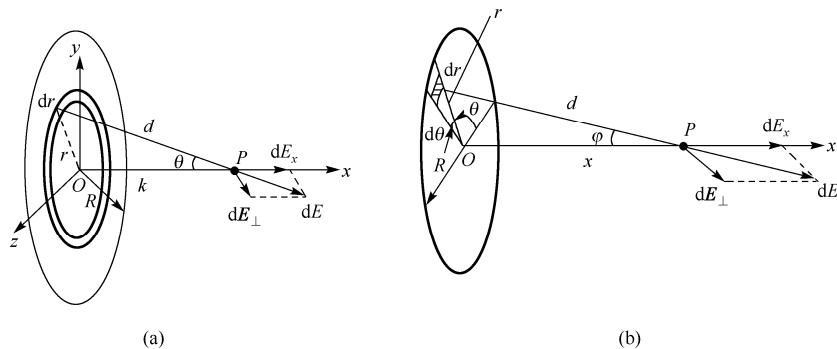


图 4.12 例 4-4 图

解法 2: 建立如图 4.12(b)所示坐标, 场点 P 距盘心 O 为 x , 取圆盘上距圆心 O 为 r 到 $r + dr$ 、圆心角在 θ 到 $\theta + d\theta$ 之间的面元, 该面元电荷为

$$dq = \sigma r d\theta dr$$

电荷元在场点 P 处激发的场强的大小为

$$dE = \frac{\sigma r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

因为圆盘对 P 点呈对称性, $d\mathbf{E}$ 在垂直于 x 轴方向上的分量相互抵消, 而平行 x 轴的分量为

$$dE_x = \frac{\sigma r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos\phi = \frac{\sigma r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0 d^2} \frac{x}{d} = \frac{\sigma x r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}$$

于是带电圆盘在 P 点所激发的场强为

$$E = \int dE_x = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

\mathbf{E} 的方向沿 x 轴正向。

讨论:

(1) $x \ll R$, 在此条件下, 有限的盘面对 P 点可视为是无限大平面, 这时有

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

即对于无限大带电平面, 它在空间所产生电场的场强大小处处相等, 而方向垂直于平面。若平面带正电, 则 \mathbf{E} 从带电平面指向两侧; 若平面带负电, 则 \mathbf{E} 从两侧指向带电平面。

(2) 若 $x \gg R$, 由场强公式得

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right)$$

将 $\left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right)^{-1/2}$ 用二项式定理展开, 即

$$\left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{x} \right)^2$$

得到

$$E \approx \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

亦即, 这时带电圆盘产生的电场近似等于点电荷在 P 点激发的电场。

(3) 如果将两块电荷面密度为 $\pm\sigma$ 的带电平板面对面平行放置, 如图 4.13 所示, 若板面尺度远大于板面间距离, 则电荷在两板内侧和外侧所激发的场强的大小可视为两个无限

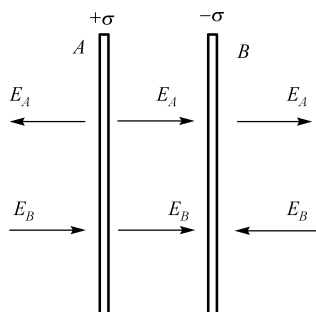


图 4.13 两块面对面平行放置的带电板之间的电场分析

大带电平面的场强进行叠加计算。应用高斯定理,可求得任一无限大带电板两侧的电场强度大小为 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (读者可自己证明)。所以有

$$\text{在两板之间: } E = E_A + E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\text{在两板外侧: } E = E_A - E_B = 0$$

可见,当两平行板带等量异号电荷时,其电场集中在两板之间,而且是匀强电场。这是实验中常用来产生匀强电场的装置。实际上因为带电板大小总是有限的,因而在其边缘附近电场分布变得很复杂,通常称为边缘效应。

例 4-5 一个点电荷 q 位于一个立方体中心,立方体边长为 a ,则通过立方体一个面的 E 通量是多少?如果将该电荷移到立方体的一个角上,这时通过立方体每个面的 E 通量分别是多少?

分析: 根据高斯定理以及电场强度的对称性来分析这一问题。

解: 如图 4.14 所示,如果点电荷 q 位于立方体中心,由对称性可知,通过立方体每一个面的 E 通量相等,为总 E 通量的 $1/6$,即

$$\Phi_e = \frac{1}{6} \left(\frac{q}{\varepsilon_0} \right) = \frac{q}{6\varepsilon_0}$$

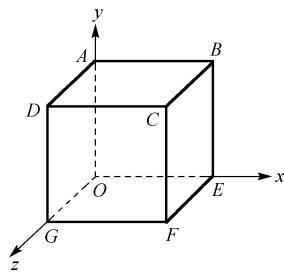


图 4.14 例 4-5 图

如果将该电荷移到立方体的一个角,如 O 点上时(这时可认为电荷是放在 8 个边长为 a 的正立方体的中心),同样根据对称性可知,通过 $SOABE$ 、 $SOADG$ 、 $SOEFG$ 三个面的 E 通量为零,而通过其他三个面的 E 通量都相等,有

$$\Phi_e = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{q}{\varepsilon_0} \right) = \frac{q}{24\varepsilon_0}$$

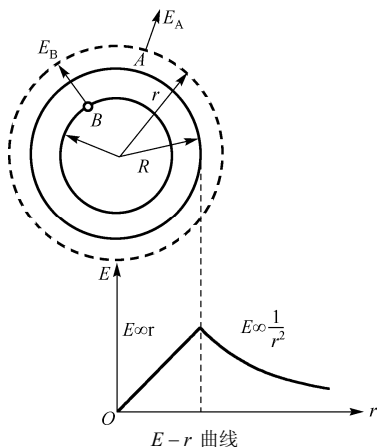


图 4.15 例 4-6 图

例 4-6 求均匀带电球体的电场分布。已知球半径为 R , 所带的总电量为 q (设 $q > 0$)。

分析: 由于电荷分布是球对称的,所以场强分布也应该是球对称的,亦即与带电球体同心的球面上各点场强的大小一定相等,而方向都沿各自的矢径方向,如图 4.15 所示。

解: 先求球外任一点 A 处的场强。以 A 到球心的距离 r ($r > R$) 为半径作一同心球面(高斯面),通过此高斯面的电通量为

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \int_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

此高斯面所包围的电荷 $\sum q_{\text{内}} = q$ 。由高斯定理, 有

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

由此得出

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq R)$$

此结果说明, 均匀带电球体外的场强分布像球体中的电荷都集中在球心时所形成的一个点电荷所产生的场强分布一样。

对于球体内任一点 B 处的场强, 可以 B 到球心距离 r ($r < R$) 为半径作一同心球面为高斯面, 通过此高斯面的电通量仍为 $E \cdot 4\pi r^2$ 。此高斯面所包围的电荷为

$$\sum q_{\text{内}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{R^3}$$

由高斯定理可得

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (r < R)$$

电场分布的 $E-r$ 曲线如图 4.15 所示。

例 4-7 求半径为 R 、均匀带电为 q 的细圆环轴线上任一点的电势, 如图 4.16 所示。

分析: 均匀带电圆环在轴线上任一点的电势的求解, 有多种方法: 一是利用电场强度与电势的关系, 先求出细圆环轴线上任一点电场强度分布, 再由电势定义: $U_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 求带电体在场点的电势; 也可利用电势叠加法求解。下面分别介绍。

解法 1: 利用电场强度与电势的关系: 由例 4-3 可知细圆环轴线上任一点 P 的场强大小

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

考虑到计算场强的线积分可选取任意路径, 这里选沿 x 轴进行积分, 取无限远为电势零点, 则 P 点电势

$$\begin{aligned} U &= \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_x^\infty \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} dx \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} (R^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_x^\infty = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

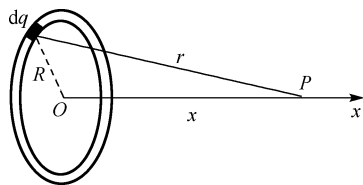


图 4.16 例 4-7 图

解法 2: 利用电势叠加法: 在圆环上取任意电荷元, $dq = \lambda dl$, $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$, 而圆环在 P 点的电势为

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

可见由两种解法得到的结果相同。所以, 采用哪种方法计算电势可视其是否简便而定。

例 4-8 求半径为 R 、总电量为 q 的均匀带电球面的电势分布。

分析: 由于电荷为球对称分布, 很容易按高斯定理求出带电球体内外的场强分布, 再由电势定义求出各区域的电势。

解: 由高斯定理求得带电球体内外的场强为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}, & r \geq R \\ 0, & r < R \end{cases}$$

选定无限远处的电势为零, 并沿径向积分, 得到球面外任一场点 P 的电势为

$$U = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (r \geq R)$$

球面内任一场点 P 的电势为

$$\begin{aligned} U &= \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_R^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= 0 + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (r \leq R) \end{aligned}$$

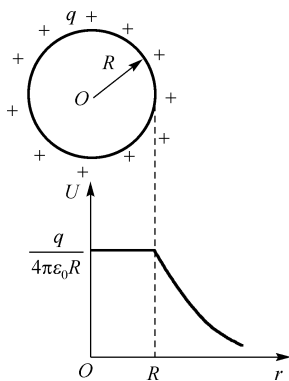


图 4.17 均匀带电球面的电势分布

即球面外任一场点的电势与所有电荷集中在球心的点电荷产生的电势相同, 而球面内任一点的电势都等于球面上的电势。

电势随 r 的变化曲线 ($U-r$ 曲线) 如图 4.17 所示。由图可知, 电势是空间坐标的连续函数。本题中的场强 E 是不连续的。

例 4-9 有一无限长均匀带电直线, 电荷线密度为 $+\lambda$, 如图 4.18 所示, 求场中各点的电势分布。

分析: 所谓无限长仅具有物理上的相对意义, 但作数学处理时是作为真正无限长来计算的。因此, 无限长带电直线的电荷分布是扩展到无限远的。在这种情况下不能应用以点电荷的电势公式为基础的电势叠加法, 所以必须由场强分布来求电势。

解: 已知无限长均匀带电直线的场强公式为

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$$

式中 \mathbf{e}_r 为垂直带电直线向外沿 r 的单位矢量。所以 \mathbf{E} 的方向垂直带电直线向外。选取距离带电直线为 r_0 的任一点 P_0 为零电势点, 按定义式 $U_P = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, 场中任一点 P 的电势为

$$\begin{aligned} U_P &= \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{r_0} E dr = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} \end{aligned}$$

显然, 若仍取 $r_0 = \infty$ 为电势零点, 将得 $U_P = \infty$, 这是无意义的。所以, 对于无限长均匀带电直线, 不能将电势零点选在无限远处。为了在有限区域内比较各点电势的相对大小, 将电势零点选择在有限区域内是合理的。若 $\lambda > 0$, 在 $r < r_0$ 的区域, 电势为正; 在 $r > r_0$ 的区域, 电势为负。

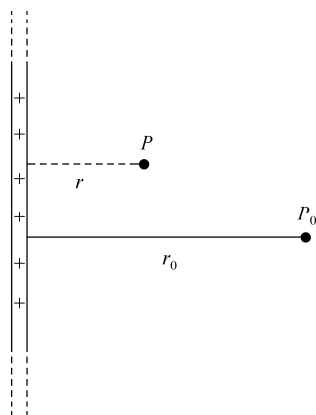


图 4.18 例 4-9 图

与无限长均匀带电直线类似的情况还有无限长带电圆柱、带电圆筒等。

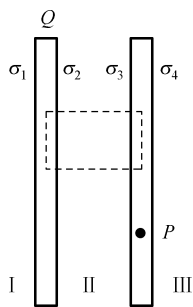


图 4.19 例 4-10 图

例 4-10 有一块大金属板, 面积为 S , 总电量 Q , 今在其近旁平行地放置第二块大金属平板, 此板原来不带电。(1) 求静电平衡时, 金属板上的电荷分布及周围空间的电场分布; (2) 如果把第二块金属板接地, 最后情况又如何 (忽略金属板的边缘效应)?

分析: (1) 由于静电平衡下导体内部无净电荷, 所以电荷只能分布在两金属板的 4 个表面上。在不考虑边缘效应情况下, 这些电荷可以看作是均匀分布的。设 4 个表面上的面电荷密度分别为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 和 σ_4 , 如图 4.19 所示。

解: 由电荷守恒定律可知

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{S} \quad (1)$$

$$\sigma_3 + \sigma_4 = 0 \quad (2)$$

由于板间电场与板面垂直, 且板内的电场为零, 所以选一个两底分别在两个金属板内而侧面垂直于板面的封闭面作为高斯面, 则通过此高斯面的电通量为零。根据高斯定理可以得出

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (3)$$

在金属板内任一点 P 的场强应该是 4 个带电面的电场的叠加, 且等于零, 因而有

$$E_P = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

即

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \quad (4)$$

联立求解式①~④可得

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2S}, \quad \sigma_2 = \frac{Q}{2S}, \quad \sigma_3 = -\frac{Q}{2S}, \quad \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$$

各区间电场分布如下:

$$\text{在 I 区, } E_I = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}, \text{ 方向向左; 在 II 区, } E_{II} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}, \text{ 方向向右; 在 III 区, } E_{III} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S},$$

方向向右。

(2) 如果把第二块金属板接地, 它就与地球这个大导体连成一体。这块金属板右表面上的电荷就会分散到更远的地球表面上而使得右表面上的电荷由于中和而消失, 因而

$$\sigma_4 = 0 \quad (5)$$

左面第一块金属板上由于电荷守恒为

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q}{S} \quad (6)$$

由高斯定理仍可得

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (7)$$

为了使得金属板内点的电场为零, 必须有

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (8)$$

由以上式⑤~⑧得出

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{Q}{S}, \quad \sigma_3 = -\frac{Q}{S}, \quad \sigma_4 = 0$$

与未接地前相比, 电荷分布改变了。这时电场分布可根据上面求得的电荷分布求出, 即

$$E_I = 0, \quad E_{II} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \text{ 向右}, \quad E_{III} = 0$$

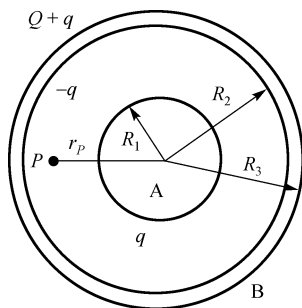


图 4.20 例 4-11 图

例 4-11 一个半径为 R_1 的金属球 A 带电 q , 在它外面有一同心金属球壳 B, 其内外半径分别为 R_2 和 R_3 , 如图 4.20 所示, 球壳带电 Q , 两球距地面很远。

(1) 若球壳 B 通过导线同较远的地面相接, 然后再断开, 求 B 球壳上的电荷分布和电势、A 球的电势以及 P 点 ($r < r_p < R_1$) 的电势。

(2) 再使 A 球通过导线经 B 壳上的小孔接地, 求 A、B 上的电荷分布和电势 (小孔的影响可忽略)。

分析: 由静电平衡条件可知, 导体球上的电荷 q 只能分布在导体球的表面上。且由于静电感应, 在导体球壳的内表面将感应出电荷 $-q$ 。由电荷守恒得导体球壳表面均匀分布电荷量为 $Q+q$, 所以静电平衡后, 空间电势分布可视为三个均匀带电球面产生电势叠加。

解: (1) 球壳接地时有

$$U_B = 0$$

这时 A 球仍带电 q , B 球壳内表面带电 $-q$, 但外表面上的电荷不再等于 $Q+q$, 先设为 Q' 。考虑到球壳 B 距地面较远, 其表面上的电荷近似为均匀分布, 所以

$$U_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

由此可得 $Q' = 0$, 即 B 球壳接地, 其外表面上无电荷。

而 A 球的电势

$$U_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

A、B 间 P 点的电势

$$U_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_P} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

(2) A 球接地时有 $U_A = 0$ 。A 球原带电 q , 设接地后改变为 q' , 而 B 球壳内表面原带电 $-q$, 也相应地改变为 $-q'$, 其外表面所带电量应为 $-q+q'$ 。根据 A 球的电势

$$U_A = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-q+q'}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

从而求得

$$q' = \frac{qR_1R_2}{R_1R_2 - R_1R_3 + R_2R_3}$$

而

$$U_B = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q+q'}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{-q+q'}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

例 4-12 一带正电荷 q_0 , 半径为 R 的金属球, 被一内外半径分别为 R_1 和 R_2 的均匀电介质同心球壳包围, 已知电介质的相对介电常数为 ϵ_r , 介质球壳外为真空, 求: (1) 空间的电场分布; (2) 球心电势; (3) 电介质球壳内表面上的极化电荷总量。

分析: 由题设可知, 电场分布具有对称性, 运用介质中的高斯定理可求出电位移 \mathbf{D} , 进而求出电场强度 \mathbf{E} 。然后根据电势定义式求得空间电势分布。再由面电荷密度与极化强度的关系 $\sigma' = P \cos \theta = -P$, 求出电介质球壳内表面处的极化强度, 继而求出电介质球壳内表面的极化电荷总量。

解: (1) 由于自由电荷 q_0 的分布和电介质的分布都是球对称的, \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 的分布也具有球对称性。作一半径为 r 的球面, 通过此球面的 \mathbf{D} 通量是

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 4\pi r^2$$

当 $r < R$ 时, $\sum q_{0\text{in}} = 0$, 由高斯定理得

$$D_1 \cdot 4\pi r^2 = 0$$

$$D_1 = 0, E_1 = 0$$

当 $R \leq r < R_1$ 时, $\sum q_{\text{in}} = q_0$, 由电介质中的高斯定理有

$$D_2 \cdot 4\pi r^2 = q_0$$

$$D_2 = \frac{q_0}{4\pi r^2}, E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

当 $R_1 \leq r \leq R_2$ 时, $\sum q_{\text{in}} = q_0$, 所以有

$$D_3 \cdot 4\pi r^2 = q_0$$

$$D_3 = \frac{q_0}{4\pi r^2}, E_3 = \frac{D_3}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

当 $R_2 < r$ 时, $\sum q_{\text{in}} = q_0$, 故

$$D_4 = \frac{q_0}{4\pi r^2}, E_4 = \frac{D_4}{\varepsilon_0} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 取无穷远处为零电势点, 则空间任意点的电势可由定义式 $U_P = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 求得。

在球心的电势:

$$\begin{aligned} U_O &= \int_0^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^R E_1 d\mathbf{l} + \int_R^{R_1} E_2 d\mathbf{l} + \int_{R_1}^{R_2} E_3 d\mathbf{l} + \int_{R_2}^\infty E_4 d\mathbf{l} \\ &= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

在 $R_2 < r$ 处的电势:

$$U_P = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty E_4 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

(3) 由式 $\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P \cos \theta = P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$, 电介质球壳内表面的极化电荷面密度为

$$\sigma' = P \cos \theta = -P$$

因为 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 所以电介质球壳内的极化强度为

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}_3 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^3} \mathbf{r} = \frac{q_0(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_r r^3} \mathbf{r}$$

所以电介质球壳内外表面的极化电荷总量是

$$\sigma'_{R_1} = -P_{R_1} = -\frac{q_0(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_1^2}$$

$$\sigma'_{R_2} = -P_{R_2} = \frac{q_0(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_2^2}$$

例 4-13 如图 4.21 所示, 一电容器由两个同轴圆筒 A、B 组成, 内筒 A 的半径为 a , 外筒 B 的半径为 b , 筒长都是 L , 中间充满相对介电常数为 ϵ_r 的各向同性均匀电介质。内、外筒分别带有等量异号电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 。设 $(b-a) \ll a$, $L \gg b$, 可以忽略边缘效应, 求: (1) 圆柱形电容器的电容; (2) 电容器储存的能量。

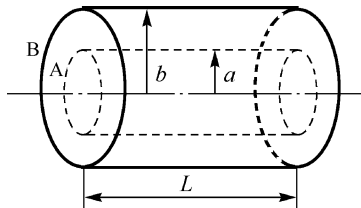


图 4.21 例 4-13 图

分析: 忽略边缘效应时, 可以将圆柱形电容器内的场强看作是无量长同轴导体系统, 此时, 场强呈对称分布。因此, 在电介质内部作一同轴的高为 L 的闭合圆柱面 S , 根据有电介质时的高斯定理, 求出 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} , 再求出两导线间的电势差, 从而由电容定义即可得到圆柱形电容器的电容。

解: (1) 根据有电介质时的高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 2\pi r L = Q$$

得

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{2\pi r L} \mathbf{e}_r, \quad a < r < b$$

因为 $D = \epsilon_r \epsilon_0 E$, 有

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 r L}, \quad a < r < b$$

式中, \mathbf{e}_r 是高斯面法向单位矢量。两个同轴圆筒之间的电势差为

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 r L} dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 L} \ln r \Big|_a^b \\ &= \frac{Q}{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

所以, 圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{2\pi \epsilon_r \epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}$$

(2) 利用 $W_e = \int_a^b w_e \cdot dV$, 可求得电容器储存的能量。其中 $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$, 所以

$$\begin{aligned}
 W_e &= \int_a^b w_e \cdot dV = \int_a^b \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 \cdot dV \\
 &= \int_a^b \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{Q}{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r L} \right)^2 \cdot dV = \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 L} \int_a^b \frac{dr}{r} \\
 &= \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}
 \end{aligned}$$

2. 习题解答

4.1 如图 4.22 所示曲线表示某种球对称性静电场的场强大小 E 随径向距离 r 变化的关系, 请指出该电场是由下列哪一种带电体产生的 ()。

- A. 半径为 R 的均匀带电球面
- B. 半径为 R 的均匀带电球体
- C. 点电荷
- D. 外半径为 R , 内半径为 $R/2$ 的均匀带电球壳

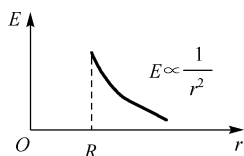


图 4.22 习题 4.1 图

分析与解: 从题图 $E-r$ 曲线可知, 在 $0 \sim R$ 区间, 其电场强度为零, 由高斯定理可知, 在 $r < R$ 范围没有静电荷, 所以这是一个半径为 R 的均匀带电球面所激发的电场分布曲线。故应选择 A。

4.2 如图 4.23 所示, 在 x 轴上, 坐标为 $+a$ 和 $-a$ 位置处, 分别放置 $+q$ 点电荷和 $-q$ 点电荷。问当 $x \gg a$ 时, 在场点 P 的场强大小为 ()。

- A. $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$
- B. $\frac{qa}{\pi\varepsilon_0 x^3}$
- C. $\frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$
- D. $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$

分析与解: 由点电荷场强公式, 可求出在场点 P 的场强大小 $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{(x-a)^2} + \frac{-q}{(x+a)^2} \right]$, 化简整理后

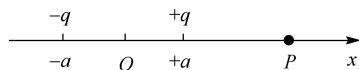


图 4.23 习题 4.2 图

有 $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2} \right]$, 考虑有 $x \gg a$, 有 $(x^2 - a^2) \approx x^2$, 所以 $E = \frac{qa}{\pi\varepsilon_0 x^3}$, 故正确选项为 B。

4.3 在静电场中, 下列说法中哪一种是正确的? ()

- A. 带正电的导体, 其电势一定是正值
- B. 等势面上各点的场强一定相等
- C. 场强为零处, 电势也一定为零
- D. 场强相等处, 电势梯度矢量一定相等

分析与解: 电势是相对的, 其值与导体所带电荷正负无关, 也与某点电场强度是否为零无关; 在等势面上各点处的场强不一定相等。譬如, 对于静电平衡下的导体, 导体表面是等势面, 但在导体表面的电场强度垂直于导体表面, 且决定于表面处的电荷面密度, 而电荷在其表面的分布由导体表面曲率决定, 曲率大的电荷密度大, 场强也强。反之场强小。D 选项叙述是正确的, 因为空间某点的电场强度等于该点处电势梯度的负值。

4.4 如图 4.24(a)所示, 一沿 x 轴放置的无限长分段均匀带电直线, 电荷线密度分别为 $+\lambda(x < 0)$ 和 $-\lambda(x > 0)$, 则 Oxy 坐标平面上 P 点 $(0, a)$ 处的电场强度矢量为 ()。

- A. 0 B. $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \mathbf{i}$ C. $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \mathbf{i}$ D. $\frac{\lambda(\mathbf{i} + \mathbf{j})}{2\pi\epsilon_0 a}$

分析与解: 该问题实为两半无限长带电直导线在场点所激发电场的叠加。首先求如题图 4.24(b)所示的无限长带电直导线在场点 P 的电场, 计算为

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

分别取 $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $+\lambda$ 代入求得左半无限长带电直导线在场点的电场; 取 $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = 0$, $-\lambda$ 代入求得右半无限长带电直导线在场点的电场。叠加后知 Oxy 坐标平面上场点 $P(0, a)$ 处的电场强度矢量为 $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \mathbf{i}$ 。所以正确选项为 B。

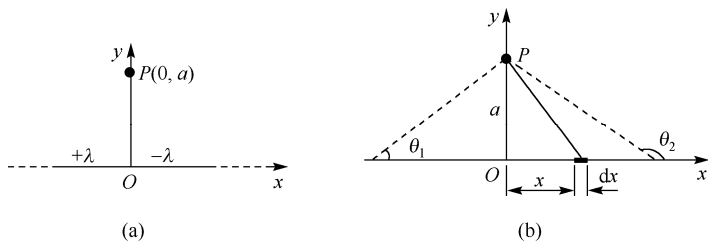


图 4.24 习题 4.4 图

4.5 如图 4.25 所示, 两无限大平行平板, 其电荷面密度均为 $+\sigma$, 则图中 a 、 b 、 c 三区域电场强度的大小分别为 ()。

- A. $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, 0, $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ B. 0, $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, 0 C. $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ D. 0, $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, 0

分析与解: 根据无限大均匀带电平面附近的电场强度公式 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ 和电场强度的叠加原理, 可以计算空间各区域的电场分布。

两板在 a 、 c 区域各自激发的电场强度大小相等、方向相同, 电场叠加后大小都为 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$; 在 b 区域两板激发的电

场强度大小相等、方向相反, 所以电场叠加后总的电场强度为零。故正确选项为 A。

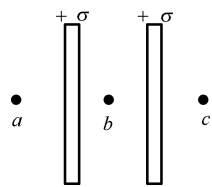


图 4.25 习题 4.5 图

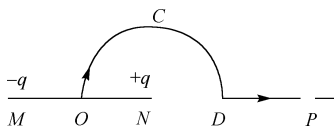


图 4.26 习题 4.6 图

4.6 如图 4.26 所示, 直线 MN 长为 $2l$, 弧 OCD 是以 N 点为中心, l 为半径的半圆弧, N 点有点电荷 $+q$, M 点有点电荷 $-q$ 。今将一实验电荷 $+q_0$, 从 O 点出发沿路径 $OCDP$ 移到无穷远处, 设无穷远处的电势为零, 则电场力做功 A 为 ()。

- A. $A < 0$, 且为有限常量 B. $A = \infty$
 C. $A > 0$, 且为有限常量 D. $A = 0$

分析与解: 静电场是保守场, 电荷在 O 点的电势能在数值上等于电荷从 O 点至无穷远处电场力做的功; 电荷在空间任意两点移动时, 可由电场力做功的负值求出电势能的增量。因此, 可由电势差求出电场力做的功。

首先求出 O 点的电势: $V_O = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 l} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} = 0$

再求出 D 点的电势: $V_D = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(3l)} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{q}{6\pi\epsilon_0 l}$

将实验电荷 $+q_0$ 从 O 点移动到 D 点时电场力所做功为

$$A_{OD} = -q_0(V_D - V_O) = -\frac{q_0 q}{6\pi\epsilon_0 l}$$

将实验电荷 $+q_0$ 从 O 点沿路径 $OCDP$ 移到无穷远处时电场力所做功为

$$A_{D\infty} = -q_0(V_\infty - V_D) = \frac{q_0 q}{6\pi\epsilon_0 l}$$

所以, 从 O 点出发沿路径 $OCDP$ 移到无穷远处时, 电场力做功 $A_{O\infty} = A_{OD} + A_{D\infty} = 0$, 故正确选项为 D。

此题可直接求试验电荷由 O 点出发沿路径 $ONDP$ 移到无穷远处时, 电场力做的功。因为静电场是保守场, 电场力做功与路径无关。

4.7 由真空中静电场的高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$ 可知下面 () 描述是正确的。

- A. 闭合面内的电荷代数和为零时, 闭合面上各点场强一定为零
 B. 闭合面内的电荷代数和不为零时, 闭合面上各点场强一定都不为零
 C. 闭合面内的电荷代数和为零时, 闭合面上各点场强不一定都为零
 D. 闭合面内无电荷时, 闭合面上各点场强一定为零

分析与解: 高斯定理表达式左端电场强度 \mathbf{E} 是曲面上各点的场强, 它是由包括封闭曲面内又包括封闭曲面外的电荷激发的合场强, 并非只由封闭面的电荷 $\sum q_{in}$ 所产生; 通过封闭面的总电通量只取决于它所包围的电荷, 即只有封闭面内部的电荷才对这一总电通量有贡献, 封闭曲面部外电荷对总电通量无贡献。所以上述 A、B、D 描述是错误的, 所以正确选项为 C。

4.8 如图 4.27 所示为一具有球对称性分布的静电场的 $E-r$ 关系曲线。请指出该静电场是由下列哪种带电体产生的 ()。

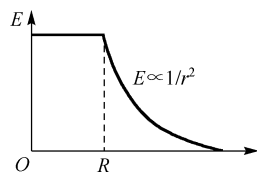


图 4.27 习题 4.8 图

- A. 半径为 R 的均匀带电球面
 B. 半径为 R 的均匀带电球体
 C. 半径为 R 、电荷体密度 $\rho = Ar$ (A 为常数) 的非均匀带电球体
 D. 半径为 R 、电荷体密度 $\rho = A/r$ (A 为常数) 的非均匀带电球体

分析与解：由题设可知该静电场具有球对称分布，因此可由高斯定理

$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$ 求出在 $r \leq R$ 任意半径处的场强，且只有在 $\rho = A/r$ 时， $\int_0^r dq = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr = 2A\pi r^2$ ，应用高斯定理计算得 $E = \frac{A}{2\varepsilon_0} = c$ ， c 为一常量；而在 $r > R$ 时， $E \propto 1/r^2$ ，故上述答案中 D 是正确的。

4.9 如图 4.28 所示，在点电荷 q 的电场中，选取以 q 为中心、 R 为半径的球面上一点 P 处作电势零点，则与点电荷 q 距离为 r 的 P' 点的电势为

()。

A. $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

B. $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$

C. $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r-R)}$

D. $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$

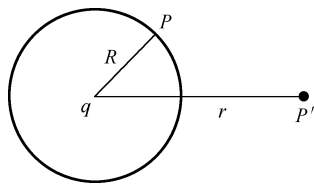


图 4.28 习题 4.9 图

分析与解：静电场中某点的电势 V_a ，在数值上等于把单位实验正电荷 q_0 从某点移到电势零点静电场力所做的功，即 $V_a = W_a / q_0 = \int_a^{\text{“电势零点”}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ ，将点电荷 q 的电场代入其中，积分

$$V_{P'} = \int_{P'}^P \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dr = \int_r^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

故应选择 B。

4.10 一个点电荷 q 位于一个立方体中心，立方体边长为 a ，则通过立方体一个面的 \mathbf{E} 通量是多少？如果将该电荷移到立方体的一个角上，这时通过立方体每一个面的 \mathbf{E} 通量分别是多少？

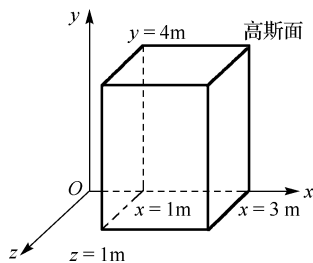


图 4.29 习题 4.11 图

分析：详解见例 4-5。

4.11 如图 4.29 所示，电场强度为 $\mathbf{E} = 3xi + 4j \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ 的非均匀电场穿过长方体的高斯面，试计算通过右表面、左表面和上表面的电通量各是多少？

分析：由电场强度通量公式 $\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ ，因为已知 \mathbf{E} ，所以只要写出每个面的表达式，代入上式即可求解。

解：由题图可知

$$d\mathbf{S}_{\text{右}} = dS_x \mathbf{i} = dydz \mathbf{i}, \quad d\mathbf{S}_{\text{左}} = -dS_x \mathbf{i} = -dydz \mathbf{i}, \quad d\mathbf{S}_{\text{上}} = dS_y \mathbf{j} = dx dz \mathbf{j}$$

所以，通过各表面的电场强度通量为

$$\Phi_{e_{\text{右}}} = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_{\text{右}} = \int_{yz} (3xi + 4j) \cdot dydz \mathbf{i} = 36 (\text{N} \cdot \text{C}^{-1} \cdot \text{m}^2)$$

$$\Phi_{e_{\text{左}}} = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_{\text{左}} = \int_{yz} (3xi + 4j) \cdot (-dydz \mathbf{i}) = -12 (\text{N} \cdot \text{C}^{-1} \cdot \text{m}^2)$$

$$\Phi_{e_{\text{上}}} = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_{\text{上}} = \int_{xz} (3xi + 4j) \cdot dx dz \mathbf{j} = 8 (\text{N} \cdot \text{C}^{-1} \cdot \text{m}^2)$$

4.12 求均匀带电细杆延长线上一点 P 的场强, 已知细杆长为 L 、带电量为 q 、场点 P 距杆的一端距离为 a 。

分析: 建立一合理的坐标系。在杆上取一线元 dx , 应用电荷元在场点激发电场强度公式, 求出在点 P 的电场 dE , 然后积分遍及整个带电体, 求出带电细杆在场点的电场。

解: 建立如图 4.30 所示坐标系。在杆上任意位置 x 处取一线元 dx , 其电荷元为 $dq = \frac{q}{L} dx$, 则该电荷元在场点 P 激发的电场为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(L+a-x)^2} i$$

将 dE 沿坐标轴积分, 则得均匀带电细杆延长线上一点 P 的场强, 为

$$\begin{aligned} E &= \int_0^L dE = \int_0^L \frac{(q/L)dx}{4\pi\epsilon_0(L+a-x)^2} i \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a} \right) i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a(L+a)} i \end{aligned}$$

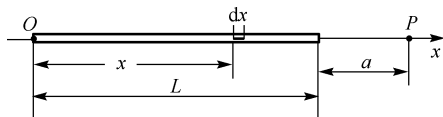


图 4.30 题 4.12 图

4.13 计算电偶极子电场中任一点的电势和场强。

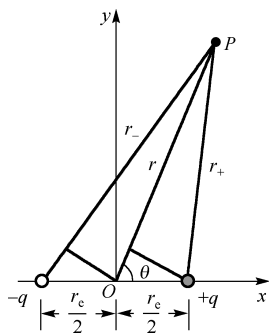


图 4.31 题 4.13 图

分析: 首先, 求电偶极子系统在空间任一点电势的大小, 可直接用点电荷的电势公式, 求 $+q$ 、 $-q$ 电荷在 P 点电势的代数和; 其次, 应用电场强度与电势的关系, 在极坐标系下求场强 E 沿 e_r 方向和沿 e_θ 方向的分量, 然后再合成。

解: 建立如图 4.31 所示的坐标系, 电偶极子沿 x 轴放置, 电偶极子中心在坐标原点, 则电偶极子在任一场点 P 的电势为

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+}$$

式中 r_+ 与 r_- 分别为 $+q$ 和 $-q$ 到 P 点的距离, 为

$$r_+ \approx r - \frac{r_c}{2} \cos \theta, \quad r_- \approx r + \frac{r_c}{2} \cos \theta$$

因此

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{r_c}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{r_c}{2} \cos \theta} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_c \cos \theta}{r^2 - \left(\frac{r_c}{2} \cos \theta \right)^2}$$

由于 $r \gg r_e$, $r_+ \approx r_- \approx r$, $r_- - r_+ \approx r_e \cos \theta$, 所以 P 点的电势可写为

$$V_P = \frac{qr_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

式中 $\mathbf{p} = q\mathbf{r}_e$ 为电偶极矩, 上式表明: 在电偶极子的电场中, 远离电偶极子一点的电势与电偶极矩的大小 $|\mathbf{p}|$ 成正比, 与 $|\mathbf{p}|$ 和 r 之间夹角的余弦成正比, 而与 r^2 成反比。

求场强 \mathbf{E} 沿 \mathbf{e}_r 方向和沿 \mathbf{e}_θ 方向的分量, 即

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

场强的大小

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$$

对于电偶极子中垂线上各点, 即 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

这一结论与例 4-1 的结果相同。

从该题可见, 利用电场强度与电势之间的关系, 首先根据电荷分布用叠加法求电势, 再由电势的空间变化率求场强分布, 这比直接利用场强叠加来求场强分布要简单一些。这是因为电场强度是矢量, 而电势是标量, 一般来说标量计算较简便, 在求得电势分布后, 只需计算空间导数便容易算出电场强度的各个分量。

4.14 半径为 R , 电荷线密度为 λ_1 的一个均匀带电圆环, 在其轴线上放一长为 l 、电荷线密度为 λ_2 的均匀带电直线段, 该线段的一端处于圆环中心处, 如图 4.32 所示。求该直线段受到的电场力。

分析: 由例 4-3 可知带电量为 q , 半径为 R 的均匀带电圆环, 在轴线上任一点的场强为 $E_x = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$, (其中 $q = 2\pi R\lambda_1$) 方向沿 x 轴的方向。该电场对长为 l 、一端在圆环中心沿 x 轴、电荷线密度为 λ_2 的均匀带电直线产生电场力的作用, 该作用可用 $dF = Edq$ 计算。

解: 在杆上取一电荷元, 其电量为 $dq = \lambda_2 dx$, 该电荷元所受到的电场力为

$$dF = Edq = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \lambda_2 dx$$

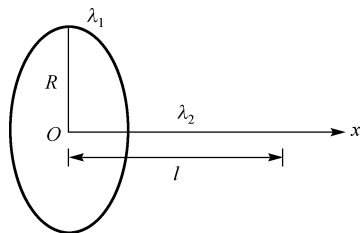


图 4.32 习题 4.14 图

该线段所受到的电场力

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^l E dq = \int_0^l \frac{2\pi R \lambda_1 x}{4\pi \varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \lambda_2 dx \\
 &= \frac{2\pi R \lambda_1 \lambda_2}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^l \frac{x dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{2\pi R \lambda_1 \lambda_2}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{-1}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \Big|_0^l \\
 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 R}{2\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{(l^2 + R^2)^{1/2}} \right]
 \end{aligned}$$

4.15 有一均匀带电的薄圆盘, 半径为 R , 电荷面密度为 σ 。求圆盘轴线上任一点的场强。

分析与解: 见例 4-4。

4.16 求无限长的均匀带电圆柱面的电场分布。已知圆柱面的半径为 R , 单位长度的电量为 λ ($\lambda > 0$)。

分析: 由于电荷分布的轴对称性, 可以确定, 带电圆柱面产生的电场也具有轴对称性, 即离开圆柱面轴线等距离各点的场强大小相等, 方向都垂直于圆柱面向外, 如图 4.33(b) 所示。因而均匀带电圆柱面的电场分布可直接用高斯定理求解。

解: 为求出无限长圆柱面外任一点 P 的场强, 可过 P 点作一封闭圆柱面 (高斯面), 柱面高为 l , 底面半径为 r , 轴线与无限长带电圆柱面的轴线重合, 如图 4.33(a) 所示。由于此高斯面的侧面上各点 E 的大小相等, 方向处处与侧面正交沿径向向外, 所以通过该侧面的电通量为 $E \cdot 2\pi r \cdot l$; 由于两底面的场强与底的法线垂直, 故通过两底面电通量为零。且高斯面所包围的电荷为 λl , 则由高斯定理得

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

由此算得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \quad (r > R)$$

根据同样的讨论, 可知带电圆柱面内部各点的场强为零, 即

$$E = 0 \quad (r < R)$$

$E-r$ 曲线如图 4.33(c) 所示。

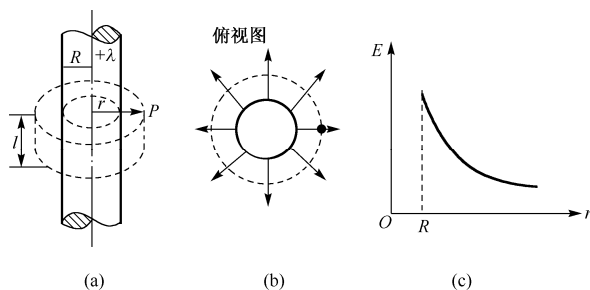


图 4.33 习题 4.16 图

4.17 求无限大均匀带电平面的电场分布。已知带电平面的电荷面密度为 σ 。

分析: 如图 4.34 所示, 考虑距离平面为 r 的 P 点的场强 E 。由于平面电荷均匀分布, 因而对于垂线 OP 是轴对称的, 所以 P 点的场强必然垂直于该带电平面。又由于电荷分布在一个无限大平面上, 所以电场分布必然对该平面对称, 故平面两侧等距离处的场强大小相等, 方向处处与平面垂直且远离平面 (当 $\sigma > 0$ 时)。故可用高斯定理直接求解。

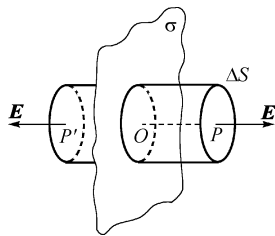


图 4.34 习题 4.17 图

解: 过场点 P 和平面左侧对称点 P' 作一个其轴线与平面垂直, 两底面 ΔS 与平面平行的圆柱形高斯面, 如题图所示。

由于圆筒的侧面上各点的 E 与侧面法线方向垂直, 所以通过侧面的电通量为零。因而只需计算通过两底面的电通量。以 ΔS 表示一个底的面积, 则该高斯面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{两底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E\Delta S$$

由于 $\sum q_{\text{内}} = \sigma\Delta S$, 所以由高斯定理得

$$2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma\Delta S$$

从而

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

此结果说明, 无限大均匀带电平面两侧的电场是均匀的。

4.18 如图 4.35 所示, 真空中一长为 L 的均匀带电细直杆, 总电荷为 q , 沿 Ox 轴固定放置。今有一带有 q_0 电荷沿 x 轴正向运动的粒子, 其质量为 m , 且在经过 Ox 上的 P 点时, 速率为 v_0 , 试求: (1) 带电杆在 P 点处所激发的电势; (2) 粒子在经过 P 点时, 它与带电杆之间的相互作用的电势能 (设无穷远处为电势零点); (3) 粒子在电场力作用下运动到无穷远处的速率 v_∞ (设 v_∞ 远小于光速)。

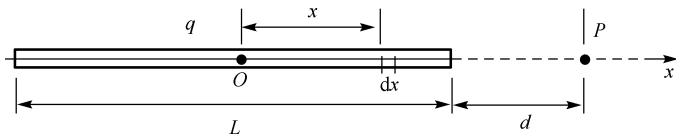


图 4.35 习题 4.18 图

分析: (1) 可由电势叠加原理求出 P 点的电势; (2) 再确定带电粒子在 P 点的电势能; 因为静电场是保守力场, 电荷在 P 点的电势能等于电荷从 P 点到无穷远处电场力所做的功。因此, 根据动能定理可以计算出粒子在无穷远处的速率。

解: (1) 建立如图所示坐标系, 在杆上取一电荷元, 其电量为 $dq = \frac{q}{L} dx$ 。设无穷远处为零电势点, 则 dq 在 P 点激发的电势为

$$dV = \frac{qdx/L}{4\pi\epsilon_0(L/2+d-x)}$$

整个带电杆在 P 点激发的电势为

$$V = \int_L dV = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{qdx/L}{4\pi\epsilon_0(L/2+d-x)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{L+d}{d}$$

(2) 带电粒子在 P 点时, 它与带电杆相互作用的电势能为

$$W_P = q_0 V = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{L+d}{d}$$

(3) 带电粒子从 P 点起运动到无穷远时, 电场力做正功, 电势能减少, 粒子动能增加, 即由动能定理有

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{L+d}{d}$$

由此可解得粒子在无限远处的速率

$$v_\infty = \left(\frac{q_0 q}{2\pi\epsilon_0 L m} \ln \frac{L+d}{d} + v_0^2 \right)^{1/2}$$

4.19 两个半径分别为 R 和 r 的球形导体 ($R > r$), 各带电荷 Q 、 q , 两球相距很远。若用细导线将两球相连接后, 求: (1) 每个球所带电荷; (2) 每球的电势。

分析: 两导体球所组成的整体可看成是一个孤立导体系统, 设这两个球相距很远, 这样每一个球上电荷分布在另一个球处所激发的电场可以忽略不计。而两球被细导线所连接(忽略细导线上少量的电荷所激发的电场), 故两球保持等电势。因此, 每个球可视为孤立导体球, 两球面上的电荷分布各自都是均匀的。

解: (1) 设两带电球连接后处于静电平衡时, 大、小球所带电荷分别为 Q' 、 q' , 因为它们用细导线相连接, 故有相等的电势, 为

$$V = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

得

$$\frac{Q'}{R} = \frac{q'}{r}$$

又由两球总电量不变, 即有

$$Q' + q' = Q + q$$

联立上面两式, 有

$$q' = \frac{(Q+q)r}{R+r}$$

$$Q' = \frac{(Q+q)R}{R+r}$$

(2) 因两球电势相等, 为 $V = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r}$, 将 Q' 或 q' 代入得到

$$V = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 (R+r)}$$

4.20 如图 4.36 所示, 一内半径为 a 、外半径为 b 的金属球壳, 带有电荷 Q , 在球壳空腔内距离球心 r 处有一点电荷 q 。设无限远处为电势零点, 试求: (1) 球壳内、外表面上的电荷; (2) 球心 O 点处, 由球壳内表面上的电荷产生的电势; (3) 球心 O 点处的总电势。

分析: 若球壳内无电荷, 在静电平衡时, 则导体球壳的电荷只能分布在球壳外表面。但球壳内放置电荷 q , 由于静电感应, 故在导体球壳的内表面将感应出电荷 $-q$; 又由于电荷守恒, 所以在导体球壳外表面将均匀分布电荷 $Q+q$; 球壳内表面上的电荷 $-q$ 在 O 点处产生的电势, 可直接用电势公式计算; 球心 O 点处的总电势为所有电荷在该点激发的电势。

解: (1) 由于静电感应, 在导体球壳的内表面将感应出电荷 $-q$; 由于电荷守恒, 所以在导体球壳外表面将均匀分布电荷 $Q+q$ 。

(2) 半径为 a 、带电为 $-q$ 的球壳在 O 点处产生的电势为

$$U_O = \int_O^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_O^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

(3) 球心 O 点处的总电势为

$$\begin{aligned} U_O &= U_q + U_{-q} + U_{Q+q} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 b} \end{aligned}$$

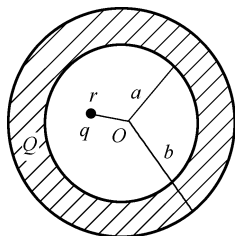


图 4.36 习题 4.20 图

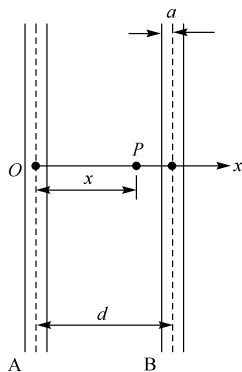


图 4.37 习题 4.21 图

4.21 有两根半径为 a , 相距为 d 的 A、B 无限长直导线 ($d \gg a$), 带有等量异号电荷, 单位长度上的电量为 λ , 求: (1) 这两根导线间的电势差; (2) 该导体组单位长度的电容。

分析: 在两导线所在平面上建立如图 4.37 所示的坐标系, 原点位于一导线的轴线上, Ox 轴垂直于两导线。在两导线间任意一点处的电场强度可视为两无限长直圆柱体外一点电场的叠加。导体组单位长度的电容可按电容定义直接计算。

解: (1) 建立如图 4.37 所示的坐标系。设左长直导线带有 λ 电荷, 则在两直导线外一点电场强度为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \left[\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (d-x)} \right]$$

于是得, 两导线间的电势差为

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_a^{d-a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^{d-a} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln x - \ln(d-x)]_a^{d-a} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a} \end{aligned}$$

(2) 由电容定义即可得导体组单位长度的电容, 有

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d-a}{a}}$$

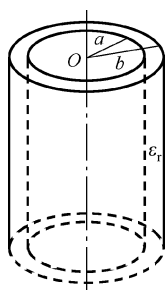


图 4.38 习题 4.22 图

4.22 如图 4.38 所示, 一半径为 \$a\$ 的“无限长”圆柱形导体, 单位长度带电荷为 \$\lambda\$。其外套一层各向同性均匀电介质, 其相对介电常数为 \$\epsilon_r\$, 构成内、外半径分别为 \$a\$ 和 \$b\$ 的圆柱体。试求该圆柱体的电位移和场强的分布。

分析: 由题设可知, 电场分布具有对称性, 运用电介质中的高斯定理可求出电位移 \$\mathbf{D}\$, 继而求出电场强度 \$\mathbf{E}\$。

解: 由于自由电荷 \$\lambda\$ 的分布和电介质的分布都是呈柱对称的, 因而 \$\mathbf{E}\$ 和 \$\mathbf{D}\$ 的分布也具有柱对称性。在距轴为 \$r\$ 的任一位置处作一长为 \$l\$ 圆柱面, 通过此圆柱面的 \$\mathbf{D}\$ 通量是

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 2\pi r l$$

当 \$r < a\$ 时, \$\sum q_{\text{in}} = 0\$, 由高斯定理得

$$D = 0, \quad E = 0$$

当 \$a < r < b\$ 时, \$\sum q_{\text{in}} = l\lambda\$, 由高斯定理得

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \mathbf{r}_0$$

当 \$r > b\$ 时, \$\sum q_{\text{in}} = l\lambda\$, 由高斯定理得

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{r}_0$$

4.23 如图 4.39 所示, 平行板电容器的极板面积 \$S = 200 \text{ cm}^2\$, 两极板间距 \$d = 5.0 \text{ mm}\$, 板板间充以两层均匀电介质 \$\epsilon_{r1} = 5.0\$、\$\epsilon_{r2} = 2.0\$, 其 \$d_1 = 2.0 \text{ mm}\$ 和 \$d_2 = 3.0 \text{ mm}\$, 若以 \$3800 \text{ V}\$ 的电势差 \$V_A - V_B\$ 加在此电容器极板上, 求: (1) 板上电荷面密度; (2) 介质内的电场强度、电位移及电极化强度。

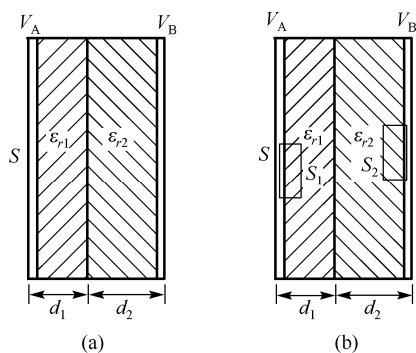


图 4.39 习题 4.23 图

分析：该系统可认为是由两个平行板电容器串联而成。这样可以先求出电容器的电容和电势差，然后根据电容器电容的定义式可得到极板上的电荷面密度；由介质中的高斯定理得到介质内的电场强度、电位移，进而求得介质内电极化强度。

解：(1) 两串联电容器的等效电容为

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\frac{\epsilon_{r1} \epsilon_0 S}{d_1} \cdot \frac{\epsilon_{r2} \epsilon_0 S}{d_2}}{\frac{\epsilon_{r1} \epsilon_0 S}{d_1} + \frac{\epsilon_{r1} \epsilon_0 S}{d_2}}$$

化简后代入数据可得

$$C = \frac{\frac{\epsilon_{r1} \epsilon_0 S}{d_1} \cdot \frac{\epsilon_{r2} \epsilon_0 S}{d_2}}{\frac{\epsilon_{r1} \epsilon_0 S}{d_1} + \frac{\epsilon_{r1} \epsilon_0 S}{d_2}} = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}}} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 2.0 \times 10^{-2}}{\frac{2.0 \times 10^{-3}}{5.0} + \frac{3.0 \times 10^{-3}}{2.0}} = 9.32 \times 10^{-11} \text{ F}$$

极板上的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{C(V_A - V_B)}{S} = \frac{9.32 \times 10^{-11} \times 3800}{2.0 \times 10^{-2}} = 1.77 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

(2) 如图 4.39(b)所示，作闭合圆柱形高斯面 S_1 、 S_2 ，根据高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_1 S = q_0 = \sigma S$$

所以有

$$D_1 = \sigma$$

$$D_2 = \sigma$$

故介质内的电位移

$$D = \sigma = 1.77 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

由 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ 得介质 ϵ_{r1} 、 ϵ_{r2} 的电场强度分别为

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} = \frac{1.77 \times 10^{-5}}{5.0 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 4.0 \times 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$E_2 = \frac{D}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} = \frac{1.77 \times 10^{-5}}{2.0 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 1.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

介质 ε_{r1} 、 ε_{r2} 的电极化强度分别为

$$P_1 = \sigma \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}} \right) = 1.77 \times 10^{-5} \left(1 - \frac{1}{5.0} \right) = 1.42 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$P_2 = \sigma \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \right) = 1.77 \times 10^{-5} \left(1 - \frac{1}{2.0} \right) = 8.85 \times 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

4.24 一半径为 R 的各向同性均匀电介质球体均匀带电, 其自由电荷体密度为 ρ , 球体的介电常量为 ε_1 , 球体外充满介电常量为 ε_2 的各向同性均匀电介质。求球内、外任一点 P 的场强大小和电势 (设无穷远处为电势零点)。

分析: 由介质中的高斯定理得到介质内的电场强度、电势。

解: 以任意半径 r 作一同心球面 (高斯面), 根据高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = DS = Q$$

则, 电位移为

$$D = \frac{Q}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho}{4\pi r^2} = \begin{cases} \frac{1}{3}\rho r & (r \leq R) \\ \frac{1}{3r^2}\rho R^3 & (r > R) \end{cases}$$

由于 $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$, 所以球内、外任一点的场强大小为

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \begin{cases} \frac{1}{3\varepsilon_1}\rho r & (r \leq R) \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_2 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

球内任一点的电势为

$$\begin{aligned} U_p &= \int_p^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^R \frac{1}{3\varepsilon_1} \rho r dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_2 r^2} dr \\ &= \frac{\rho}{6\varepsilon_1} (R^2 - r^2) - \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_2} \end{aligned} \quad (r \leq R)$$

球外任一点的电势为

$$\begin{aligned} U_p &= \int_p^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_2 r^2} dr \\ &= -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_2 r} \end{aligned} \quad (r > R)$$

4.25 半径分别为 R_1 和 R_3 的两同轴直圆筒构成一柱形电容器, 圆筒长为 L , 两极板间充满相对电容率分别为 ϵ_{r1} 和 ϵ_{r2} 的两层电介质, 且它们的分界面为一半径为 R_2 ($R_1 < R_2 < R_3$) 的圆柱面, 设 $R_2 - R_1 \ll L$ 。求此电容器带电量为 Q 时所储存的电。

分析: 应用电场的轴对称性, 求出介质中的电场强度, 再应用电场能量密度公式, 可求出电容器所储存的能量。

解: 电容器两极板间的电场具有轴对称性, 运用介质中的高斯定理可求出

$$D = \frac{Q}{2\pi rL}$$

$R_1 < r < R_2$ 时

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} rL}$$

$R_2 < r < R_3$ 时

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} rL}$$

由电容器电场能量密度公式 $w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} ED$, 可求出各区域的电场能量密度

$$R_1 < r < R_2 \text{ 时} \quad w_{e1} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1^2$$

$$R_2 < r < R_3 \text{ 时} \quad w_{e2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2^2$$

在电容器两极板间取一半径为 r 、厚度为 dr 的同轴圆柱薄筒, 其所储存的能量为

$$dW_e = w_e dV = w_e \cdot 2\pi rL dr$$

电容器中全部电场空间所储存的能量为

$$\begin{aligned} W_e &= \int dW_e = \int_{R_1}^{R_2} w_{e1} \cdot 2\pi rL dr + \int_{R_2}^{R_3} w_{e2} \cdot 2\pi rL dr \\ &= \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} + \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} L} \int_{R_2}^{R_3} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 L} \left(\frac{1}{\epsilon_{r1}} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} \ln \frac{R_3}{R_2} \right) \end{aligned}$$

此题还可以先求出电容器的电容 C , 然后利用公式 $\left[W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU \right]$ 计算电容器的储能。

4.26 如图 4.40 所示, 一半径为 R 的导体球, 带有电荷 Q , 在它外面同心地包一层各向同性的均匀电介质球壳, 其内、外半径分别为 a 和 b , 相对介电常量为 ϵ_r 。求: (1) 介质内、外的电场强度 E 和电位移 D ; (2) 电介质中的电极化强度 P 和介质表面上的束缚电荷面密度 σ' 。

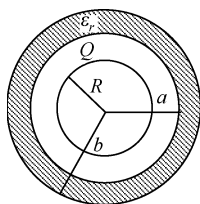


图 4.40 习题 4.26 图

分析：带电导体球和球外同心的电介质球壳，其内、外电场分布具有对称性，由电介质中的高斯定理可以得到空间各处连续分布的电位移矢量 \mathbf{D} ，再由 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 的关系得到各处的电场强度。继而再利用 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 和 \mathbf{P} 关系求得电介质内的极化强度 \mathbf{P} 。

解：(1) 作半径 $r > R$ 的同心高斯球面，则有

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = DS = Q$$

由于空间各处电位移矢量 \mathbf{D} 的（法向分量）连续分布，所以得到

$$D_1 = D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (R < r < a, \quad a < r < b, \quad b < r)$$

由于 $D_1 = \epsilon_r \epsilon_0 E_1$ ， $D_2 = \epsilon_0 E_2$ ，于是得到电介质内外电场强度的大小

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2}, \quad (a < r < b)$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}, \quad (R < r < a, \quad b < r)$$

若 $Q > 0$ ，则 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 的方向沿矢径向外，反之则向内。

(2) 由 $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$ ，得到电介质内极化强度

$$\mathbf{P} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi \epsilon_r r^2} \mathbf{e}_n$$

式中 \mathbf{e}_r 是沿矢径向外的单位矢量，可见，在电介质层内的极化是非均匀的。

由 $\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$ 得到电介质表面的极化面电荷密度

$$\text{在电介质内表面:} \quad \sigma'_a = P_n = -P_{r=a} = -\frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi \epsilon_r a^2}$$

$$\text{在电介质外表面:} \quad \sigma'_b = P_n = -P_{r=b} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi \epsilon_r b^2}$$

4.27 如图 4.41 所示，半径为 R ，电荷体密度为 ρ 的均匀带电体，在其内部挖去一半径为 $r (r < R)$ 的球形腔。若带电球体球心 O 指向球形腔 O' 的矢量为 \mathbf{a} ，试证明球形腔中任一点 P 的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$$

分析：本题带电体的电荷分布不具有球对称，其电场分布也不是球对称分布，因此无法直接利用高斯定理求电场的分布，但可用补偿法求解。挖去球形空腔的带电体在电学上等效于一个完整的、电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体和一个电荷体密度

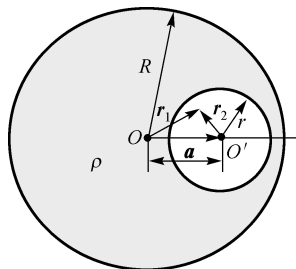


图 4.41 习题 4.27 图

为 $\rho' = -\rho$ 的、球心在 O' 的带电小球体 (半径等于空腔体的半径)。大、小球体在空腔内任意 P 点产生的电场强度为 \mathbf{E}_1 、 \mathbf{E}_2 ，则 P 点的电场强度 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ 。

证明：设空腔内一点 P (题图中 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 的端点位置)。由高斯定理很容易求得电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体内任一点的电场强度，为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}$$

设球形空腔导体电荷体密度为 $\rho' = -\rho$ ，所以大、小球体在空腔内任意点 P 产生的电场强度分别为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\rho'}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}_2$$

而大、小球体在空腔内任意点 P 产生的合电场强度为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ ，即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

式中， \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 分别为带电球体球心 O 和球形腔球心 O' 到任一点 P 的位矢。根据几何关系 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}$ ，即上式可写成

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{a}$$

由于矢量 \mathbf{a} 为一常矢，所以球形腔内电场强度 \mathbf{E} 为一恒矢量。

4.28 半径为 R 的介质球，相对介电常量为 ε_r 、其体电荷密度 $\rho = \rho_0(1 - r/R)$ ，式中 ρ_0 为常量， r 是球心到球内某点的距离。试求：(1) 介质球内的电位移和场强分布；(2) 在半径 r 为多大时场强最大？

分析：由于电荷的分布和电介质的分布都是呈球对称性，故 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 的分布也具有球对称性，因而介质球内的电位移和场强分布可用高斯定理求解。

解：(1) 在介质球内作一半径为 r 的高斯面，则通过此高斯面的 \mathbf{D} 通量是

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 4\pi r^2$$

由于

$$\begin{aligned} q_{\text{in}} &= \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi \rho_0 \left[\frac{1}{3} r^3 - \frac{r^4}{4R} \right] \end{aligned}$$

所以由高斯定理

$$D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \rho_0 \left[\frac{1}{3} r^3 - \frac{r^4}{4R} \right]$$

得

$$D = \rho_0 \left[\frac{1}{3} r - \frac{r^2}{4R} \right]$$

又由电位移与电场强度的关系, 得

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \left[\frac{1}{3}r - \frac{r^2}{4R} \right]$$

(2) 求上式 E 对 r 的一阶导数, 并令 $\frac{dE}{dr} = 0$, 则有

$$r = \frac{2}{3}R$$

即当 $r = \frac{2}{3}R$ 时, 此处场强最大。

第5章 稳恒磁场

磁现象和电现象虽然早已被人们发现，但在很长时期内磁学和电学各自独立地发展着，直到 19 世纪 20 年代前后才将电现象与磁现象联系了起来。近代物理理论表明，一切磁现象起源于电荷的运动，电荷不论静止还是运动，在其周围空间都要激发电场，而运动的电荷在周围空间不仅有电场，而且还要激发磁场；磁场也是物质的一种形态，它只对运动电荷或电流施加作用，这种作用可用磁感应强度和磁场强度描述。物质间的磁相互作用都是通过磁场来传递的。如果磁场中有实物物质存在，在磁场的作用下，其内部状态将会发生变化，并反过来影响磁场的分布，这就是物质的磁化过程。磁场与电场一样具有能量。稳恒电流所产生的磁场不随时间变化，称为稳恒磁场，又称为静磁场。稳恒磁场与静电场的性质、规律不同，但研究方法却有类似之处。本章从教学基本要求出发，着重梳理了稳恒磁场的基本概念、恒定电流激发磁场的规律和性质等知识点及本章节的重难点，并通过精选例题的分析和解答、习题的分析和解答给出相应的学习指导。

5.1 学习要求

1. 理解恒定电流产生的条件，电流密度矢量、稳恒电场、电源及电动势等概念，理解电流连续性方程和电流稳恒的条件。

2. 掌握磁感应强度概念，掌握毕奥-萨伐尔定律、高斯定理和安培环路定理、安培定律，并能结合磁感应强度叠加原理进行简单的计算，掌握计算磁场分布的几种方法。

3. 理解磁力矩概念、理解洛伦兹力和安培力的公式及简单的应用，会分析磁场对载流导线和线圈的作用，会分析带电粒子在电磁场中所受作用力及其运动。

4. 了解磁介质磁化的微观机理及特征、磁化强度 \mathbf{M} 。理解磁场强度 \mathbf{H} ，理解磁介质中的安培环路定理，会用它计算介质中的磁场强度；了解在各向同性介质中 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 的关系。并能由已知的磁场强度求相应的磁感应强度。

5. 能根据霍尔效应判断半导体的类型。

5.2 内容提要

1. 基本概念

(1) 电流密度矢量：电流密度 \mathbf{j} 是一个矢量，其方向与该点正电荷的运动方向相同，即与该点的场强 \mathbf{E} 的方向相同，大小等于通过垂直于电流方向的单位面积的电流

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}} \quad (5-1)$$

(2) 稳恒电场: 导体内各处的电流密度 j 都不随时间变化的电流称为稳恒电流。在稳恒电流的情况下, 虽然存在电荷的定向运动, 但导体内的电荷分布和导体内、外的电场都不随时间变化, 这样的电场称为稳恒电场。稳恒电场与静电场具有相同的性质, 稳恒电场也遵守静电场的高斯定理和环路定理。

(3) 电源电动势: 为了要形成稳恒电流, 必须有一种本质上完全不同于静电性的力, 能够不断地把流到负极板上的正电荷送回到正极板上, 这样才能使两极板保持恒定的电势差, 从而在导线中维持稳恒的电流。能提供这种非静电力的装置称为电源。电荷 q 在电源中所受的非静电力, 是一种非静电性电场作用的结果。用 E_k 来表示这一非静电性电场, 而电源的电动势定义为

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} E_k \cdot d\mathbf{l} \quad (5-2)$$

其含义是将单位正电荷从电源的负极经电源内部移到正极的过程中非静电场力所做的功。

电动势是标量, 但有方向。通常把电源内从负极指向正极的方向, 即电势升高的方向, 规定为电动势的方向。

在有些情况下非静电力存在于整个电流回路中, 这时回路的总电动势应为

$$\varepsilon = \oint_L E_k \cdot d\mathbf{l} \quad (5-3)$$

式中, 线积分遍及整个电流回路 L 。

(4) 电流的连续性方程

$$\oint_S j \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt} \quad (5-4)$$

电流稳恒的条件: 通过任一封闭曲面的稳恒电流必然为零。即

$$\oint_S j \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5-5)$$

稳恒电流的条件表明, 流进一个封闭曲面的电流一定等于流出这个封闭曲面的电流, 即稳恒电流是连续的。

(5) 磁力: 物质磁性最直观的表现是两个磁体之间的吸引力或排斥力。磁体中受引力或斥力最大的区域称为磁体的磁极, 磁极之间的相互作用与静电荷之间的作用类似。迄今为止, 所发现的磁体上都有两个自由磁极(磁南极和磁北极)。考虑强度为 m_1 和 m_2 , 距离为 r 的两个磁极, 相互之间的作用力 F 为

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2} \quad (5-6)$$

式中, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ 称为真空磁导率。

磁极之间能发生相互作用, 是由于在磁极(体)周围存在磁场。磁体周围分布的磁场可用磁力线形象地表示, 这与电荷周围电场的分布用电力线表示类似。但注意: ① 磁力线

总是从 N 极出发, 进入与其最近邻的 S 极, 并形成闭合回路; ② 磁力线总是沿磁导率最大的路径, 因此磁力线通常呈直线或曲线; ③ 任意两条同向磁力线相互排斥, 因此不存在相交的磁力线。

磁偶极子: 用无限小电流回路所表示的小磁体, 定义为磁偶极子。设磁偶极子的磁极强度为 m , 磁极间距离为 l , 则用 $\mathbf{j}_m = m\mathbf{l}$ 来表示磁偶极子所具有的磁偶极矩。 \mathbf{j}_m 的方向为由 S 指向 N。

磁偶极子磁性的大小和方向可以用磁矩来表示。

(6) 磁矩 \mathbf{m} : 定义为线圈中的电流 I 与线圈所包围的面积 S 的乘积。磁矩的方向与线圈平面的法线方向相同。

$$\mathbf{m} = I S \mathbf{e}_n \quad (5-7a)$$

式中, \mathbf{e}_n 表示面元法线正方向的单位矢量, 电流元与 \mathbf{e}_n 之间遵从右手关系。如果线圈由 N 匝导线构成, 则其磁矩为

$$\mathbf{m} = N I S \mathbf{e}_n \quad (5-7b)$$

2. 恒定电流、电流密度和电动势

(1) 电流强度和电流密度: 如果在时间 dt 内, 通过导线某一横截面的电量为 dq , 则通过该截面的电流强度

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (5-8)$$

即电流强度 I 等于单位时间内通过导线横截面的电量。在国际单位制中, 电流强度的单位是安培 (A), $1A = 1C/s$ 。注意: 电流的方向是正电荷运动的方向, 电流虽有方向, 但它是标量, 不是矢量, 因为它不遵从矢量运算法则。

流过任一有限面积 S 的电流强度为

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-9)$$

(2) 欧姆 (Ohm) 定律的微分形式: 设 ρ 是导体材料的电阻率, $\sigma = 1/\rho$ 称为电导率, 则

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (5-10)$$

这就是欧姆定律的微分形式, 它描述了导体中各点的电流密度与电场强度的关系。

3. 毕奥-萨伐尔定律、磁感应强度叠加原理

(1) 磁感应强度 \mathbf{B} : 描述空间某点磁场的强弱和方向的分布, 单位是特斯拉 (T)。定义磁感应强度矢量 \mathbf{B} 有多种方法。例如: 通过磁场对载流线圈有磁力矩 \mathbf{M} 的作用来定义。设线圈受到最大磁力矩为 \mathbf{M}_{\max} , 则磁感应强度的大小为

$$B = \frac{M_{\max}}{m} \quad (5-11)$$

磁感应强度的方向: 试验线圈在场点处于平衡位置时 \mathbf{e}_n 的方向。还可通过引入磁场中的运动试探电荷、载流导体或永久磁体受磁场力的作用, 即可用磁场对运动试探电荷的作用来描述磁场。设有一运动试探电荷 $+q_0$ 以速率 v 进入恒定磁场中某 P 点时, 从实验发现,

该电荷所受到的磁场力 \mathbf{F} 的大小是随电荷进入磁场的速度 \mathbf{v} 的方向不同而不同, 但所受磁场力的方向始终垂直于电荷运动的方向。规定: 运动试探电荷 $+q_0$ 通过 P 点不受磁场力的方向为该点处磁场的方向。实验还发现, 当运动正电荷速度 \mathbf{v} 的方向与磁感应强度 \mathbf{B} 的方向垂直时, 所受到的磁场力具有最大值 \mathbf{F}_{\max} , 这个最大磁场力正比于该试探电荷的大小, 也正比于运动电荷的速率 v , 但比值 $\mathbf{F}_{\max} / q_0 v$ 却在 P 点具有确定的量值, 而与运动试探电荷的 $q_0 v$ 值的大小无关。因此, 定义磁场中 P 点的磁感应强度 \mathbf{B} 的大小为

$$B = |\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{F}_{\max}|}{q_0 v} \quad (5-12)$$

(2) 磁感应线(磁力线)和磁通量

磁感应线(磁力线): 磁力线上每一点的切线方向与该点的磁感应强度 \mathbf{B} 的方向一致, 通过某点垂直于磁场方向的单位面积上的磁力线条数等于该点 \mathbf{B} 的大小。磁力线有以下特点: ①磁力线是无头无尾的闭合曲线(或两端伸向无穷远处), 所以磁场是涡旋场; ②磁力线与载流导线互相套合(即每条磁力线都围绕着载流导线); ③任意两条磁力线都不相交。

磁通量: 磁场中, 通过一给定曲面的磁力线条数称为通过该曲面的磁通量, 数学表达式为

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5-13)$$

(3) 毕奥(J.B.Biot)-萨伐尔(F.Sarvart)定律: 电流元在空间某点 P 产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小与电流元 $I d\mathbf{l}$ 的大小成正比, 与电流元到 P 点的位矢 \mathbf{r} 之间的夹角 θ 的正弦成正比, 与电流元到 P 点的距离 r 的二次方成反比, 即

$$dB = k \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \quad (5-14)$$

式中, $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ 为比例系数, 其中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ 为真空磁导率, 于是磁感应强度写成矢量式为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (5-15)$$

磁感应强度的方向: 由右手螺旋法则确定, $d\mathbf{B}$ 的方向沿 $I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$ 的方向, 如图 5.1 所示。对于任意载流体, 可根据磁感应强度的叠加原理求得磁场中任意点的磁感应强度 \mathbf{B} 。

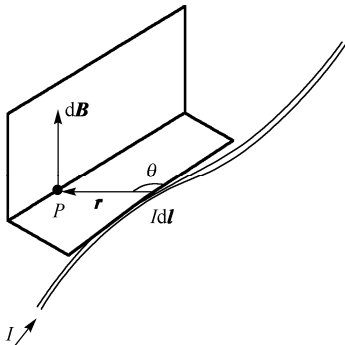


图 5.1 电流元所激发的磁感应强度的方向

(4) 磁感应强度叠加原理：电流元系产生的磁场在某点的磁感应强度等于各个电流元单独存在时，在该点产生的磁感应强度的矢量和，这一结论称为磁感应强度叠加原理，其数学形式为

$$\mathbf{B} = \sum_{j \neq i}^n \mathbf{B}_j \quad (5-16a)$$

或

$$\mathbf{B} = \int_l d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (5-16b)$$

(5) 几种常见电流的磁场分布

① 载流直导线的磁场：长为 l 的载流直导线，电流为 I ，离直导线电流垂直距离为 a 处 P 点的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (5-17a)$$

式中， θ_1 和 θ_2 分别为载流直导线起点处和终点处电流元的方向与位矢 \mathbf{r} 之间的夹角。

无限长直电流（即上式中 $\theta_1 \rightarrow 0$ ， $\theta_2 \rightarrow \pi$ ）周围某一场点 P 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (5-17b)$$

② 圆形载流导线（ x 轴）的磁场：通有电流 I 的圆形线圈（常称为圆电流），半径为 R ，则其轴线上 P 点的磁感应强度 \mathbf{B} 的大小为

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (5-18a)$$

磁感应强度 \mathbf{B} 的方向与圆电流环绕方向呈右手螺旋关系。如果场点在圆心（ $x = 0$ ）处，则该处磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} \quad (5-18b)$$

③ 载流密绕直螺线管内部轴线上的磁场：处在真空中均匀密绕直螺线管，如果半径为 R ，电流为 I ，单位长度上绕有 n 匝线圈，则其管内轴线上任一点 P 处的磁感应强度 \mathbf{B} 的大小为

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (5-19a)$$

式中， β_1 和 β_2 分别为 P 点到直螺线管两端圆电流的连线方向与坐标轴 x 方向之间的夹角。

无限长直载流螺线管（ $\beta_1 \rightarrow \pi$ ， $\beta_2 \rightarrow 0$ ）内的磁感应强度 \mathbf{B} 的大小为

$$B = \mu_0 n I \quad (5-19b)$$

4. 恒定磁场的高斯定理和安培环路定理

(1) 高斯(Gauss)定理: 由于磁力线是闭合曲线, 因此通过任一闭合曲面磁通量的代数和(净通量)必为零, 即

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5-20)$$

(2) 安培(Ampere)环路定理: 在稳恒电流的磁场中, 磁感应强度沿任意闭合路径的环路积分, 等于这个闭合路径所包围的电流的代数和与真空磁导率的乘积, 即

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_{in} \quad (5-21)$$

磁感应强度的环流完全由闭合路径 l 所包围的电流确定, 与未包围的电流无关。

5. 安培定律、洛伦兹力

(1) 安培定律: 放在磁场中某点处的电流元 $Id\mathbf{l}$, 受到的磁场力为

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (5-22)$$

\mathbf{B} 为电流元所在处的磁感应强度, $d\mathbf{F}$ 称为安培力, 它的方向垂直于电流元 $Id\mathbf{l}$ 和磁感应强度 \mathbf{B} 组成的平面, 与 $Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ 方向一致。式(5-22)称为安培定律。

(2) 洛伦兹(Lorentz)力: 一个电荷 q 在磁场 \mathbf{B} 中以速度 \mathbf{v} 运动时, 该电荷所受的磁场力(也称为洛伦兹力)为

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5-23)$$

洛伦兹力的大小为

$$f = qvB \sin \theta \quad (5-24)$$

式中, θ 为电荷的运动方向与所在点磁场 \mathbf{B} 的方向的夹角。洛伦兹力 \mathbf{f} 的方向垂直于 \mathbf{v} 和 \mathbf{B} 组成的平面: 若 $q > 0$, 则 \mathbf{f} 的方向与 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向相同; 若 $q < 0$, 则 \mathbf{f} 的方向与 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向相反。

一个运动电荷产生的磁场为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad (5-25)$$

(3) 霍尔(E.H.Hall)效应: 导体板放在磁场中通入电流 I , 如果磁场方向垂直于板平面, 则在导体板上、下两侧将产生电势差, 其值为

$$V_H = \frac{1}{nq} \cdot \frac{IB}{d} \quad \text{或} \quad V_H = R_H \frac{IB}{d} \quad (5-26)$$

式中, V_H 称为霍尔电势差, d 为导体在磁场方向的厚度, $R_H = \frac{1}{nq}$ 称为材料的霍尔系数。

霍尔效应不只在金属导体中产生, 在半导体和导电流体(如等离子体)中也会产生。

6. 恒定磁场中的磁介质

(1) 磁介质、磁化：在磁场中有实物物质存在，则磁场和实物之间的相互作用，实物物质的分子状态发生变化，从而激起附加磁场而改变原来磁场的分布。这种在磁场作用下，其内部状态发生变化，并反过来影响磁场分布的物质，称为磁介质。磁介质在磁场作用下内部状态的变化称为磁化。

(2) 磁化强度（矢量）：单位体积内分子磁矩 $m_{\text{分子}}$ 的矢量和，表达式为

$$\mathbf{M} = \frac{\sum m_{\text{分子}}}{\Delta V} \quad (5-27)$$

(3) 磁场强度矢量的定义：

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (5-28)$$

在国际单位制中，磁化强度矢量 \mathbf{M} 的单位、磁场强度矢量 \mathbf{H} 的单位都为安培每米 ($\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$)。

7. 有磁介质存在时的磁场

(1) 磁化电流及磁介质的磁化

磁化电流：磁介质在受到磁场作用时，在磁介质横截面边缘处，分子电流未被抵消，形成与横截面边缘重合的一层圆电流，这种电流称为磁化电流（也称为束缚电流）。

磁介质的磁化：在外磁场的作用下，均匀磁介质的表面上出现磁化电流的现象。

(2) 磁介质中的安培环路定理：磁场强度 \mathbf{H} 的环流（沿任一闭合路径 l 的线积分）等于该闭合路径 l 所包围的传导电流 I_{in} 的代数和，而与磁介质无关。其数学表达式为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_{\text{in}} \quad (5-29)$$

在磁介质中，对于各向同性线性铁磁物质，实验表明：对置于外磁场中的磁体，其磁化强度 \mathbf{M} 与磁场强度 \mathbf{H} 成正比，即， $\mathbf{M} = \chi_{\text{m}} \mathbf{H}$ 。式中， χ_{m} 称为磁介质的磁化率，它是表征磁体强弱的一个参量。令 $1 + \chi_{\text{m}} = \mu_{\text{r}}$ ， μ_{r} 称为相对磁导率，而 $\mu_0 \mu_{\text{r}} = \mu$ 称为磁导率，在这种情况下，磁场强度与磁感应强度有如下关系，即

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_{\text{r}} \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (5-30)$$

可见，在求解磁介质中的磁感应强度 \mathbf{B} 时，可以先利用式 (5-29) 求出磁介质中某点的磁场强度 \mathbf{H} ，然后再利用式 (5-30) 求出磁感应强度 \mathbf{B} 。这与在电介质中，通过求解电位移矢量 \mathbf{D} 求电场强度 \mathbf{E} 相类似。

8. 物质的磁性、顺磁质、抗磁质、铁磁质

(1) 磁介质：在考虑物质与磁场的相互影响时，把所有的物质都称为磁介质。磁场中，磁介质磁化后，在均匀磁介质表面出现磁化电流，于是磁介质中的磁场为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' = \mu_{\text{r}} \mathbf{B}_0 \quad (5-31)$$

式中, B_0 为传导电流产生的外磁场, B' 是磁化电流产生的磁场, μ_r 称为磁介质的相对磁导率, 它随磁介质的种类和状态的不同而不同, 对于真空, $\mu_r = 1$ 。

(2) 磁介质可分为以下三类:

抗磁质——相对磁导率 μ_r 略小于 1 的磁介质。

顺磁质——相对磁导率 μ_r 略大于 1 的磁介质。

铁磁质——相对磁导率 $\mu_r \gg 1$, 而且还随外磁场的大小发生变化的磁介质。

5.3 重点难点分析

1. 本章重点

本章内容的重点是掌握电流密度矢量、磁感应强度、磁通量、磁化强度、磁场强度矢量等基本概念; 熟练应用毕奥-萨伐尔定理、高斯定理和安培环路定理、安培定律, 并能结合磁感应强度叠加原理进行简单的计算, 理解磁力矩、洛伦兹力公式及简单的应用; 能用介质中的安培环路定理计算介质中的磁场强度, 并由此计算出相应的磁感应强度。

2. 本章难点

本章内容的难点在于对电流密度矢量、磁化强度概念的理解; 磁感应强度的矢量叠加的应用, 特别是对连续的电流分布问题感到无从下手。对此, 一般的解决方法也是利用微元法来处理, 即将复杂的连续的电流分布分解为若干个或无数个典型的载流单元或微元, 那么场点处的磁感应强度等于这些典型载流单元或微元在该点处产生的磁感应强度的矢量和或积分(注意: 对矢量积分时一般是将其化为沿某坐标轴的积分, 例如直角坐标轴上的积分)。在选择载流单元或微元时, 特别注意电流元 Idl 产生的 dB 的方向。

此外, 还有磁聚焦现象、磁镜效应、霍尔效应、磁力矩 $M = m \times B$ 等概念难于理解。

5.4 精选例题与习题解答

1. 精选例题

例 5-1 如图 5.2 所示的弓形线框中通有电流 I , 求圆心 O 处的磁感应强度 B 。

分析: 圆心处的磁感应强度为圆弧部分和直线段部分电流在 O 处产生的, 因此可分两段分别应用毕奥-萨伐尔定律计算。

解: 圆弧段电流在 O 点产生的磁感应强度, 为

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\theta}{R}$$

积分时, θ 为 $0 \rightarrow 2\pi/3$, 故

$$B_1 = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{6R}$$

方向垂直弓形线框平面向外“ \odot ”。

直线段电流在 O 点产生的磁感应强度, 如图 5.2(b) 所示, 在直线段上取一电流元 Idl , 该电流元在 O 点产生的磁感应强度为

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$$

进行积分运算时, 首先把 dl 、 r 、 α 等变量用同一参变量表示, 从图中可看出

$$r = a \csc \alpha, \quad l = -\arctan \alpha, \quad dl = a \csc^2 \alpha d\alpha$$

代入上式, 得

$$dB_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha$$

积分时, 取 $\alpha_1 = \pi/6$, $\alpha_2 = \pi - \pi/6$, 考虑 $a = R \cos \frac{\pi}{3} = \frac{R}{2}$, 所以

$$B_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos \frac{\pi}{3}} \cdot \left(-2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} \mu_0 I}{2\pi R}$$

方向垂直纸面向里“ \otimes ”。

所以, 总场强为

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3} \right)$$

方向垂直纸面向里“ \otimes ”。

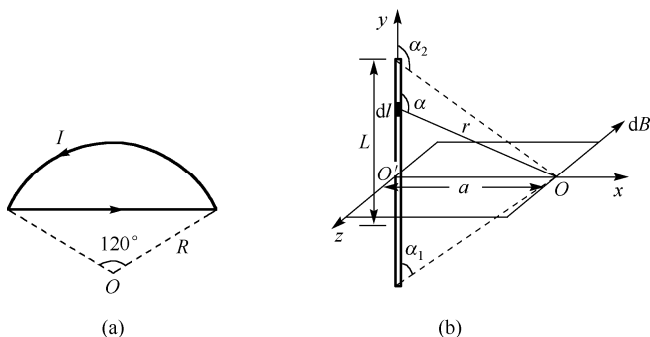


图 5.2 例 5-1 图

例 5-2 如图 5.3 所示, 两个半径均为 R 的线圈平行共轴放置, 其圆心 O_1 、 O_2 相距为 a , 在两线圈中通以电流强度均为 I 的同方向电流。(1) 以 O_1O_2 连线的中点 O 为原点, 求轴线上坐标为 x 的任意 P 点的磁感应强度大小; (2) 试证明: 当 $a = R$ 时, O 点处的磁场最为均匀。

分析: 求出左、右载流圆线圈在 P 点的磁感应强度, 并

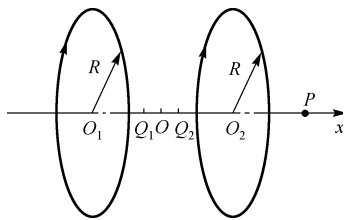


图 5.3 例 5-2 图

由叠加原理求出 P 点的合磁感应强度。再讨论合磁感应强度 B 随 x 的变化率 (即 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}x$), 并由 B 对 x 的二阶导数 ($\mathrm{d}^2B/\mathrm{d}x^2$) 确定 O 点附近磁场随 x 的变化情况。

解: (1) 载流圆线圈在 x 轴线上任意 P 点的磁感应强度公式为

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

左线圈在 x 轴 P 点产生的磁感应强度为

$$B_{P_1} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{a}{2} + x \right)^2 \right]^{3/2}}$$

右线圈在 x 轴 P 点产生的磁感应强度为

$$B_{P_2} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \left[R^2 + \left(\frac{a}{2} - x \right)^2 \right]^{3/2}}$$

因为, B_{P_1} 和 B_{P_2} 在 P 点方向一致, 均沿 x 轴线正向 (水平向右), 所以 P 点磁感应强度大小为

$$B_P = B_{P_1} + B_{P_2} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} + \left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

(2) B_P 随 x 变化, 其变化率 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}$ 为

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} = -\frac{3\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \left(x + \frac{a}{2} \right) \left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{5}{2}} + \left(x - \frac{a}{2} \right) \left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{5}{2}} \right\}$$

讨论: 当 $x=0$ 时, 由上可知 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}=0$, 可见在 O 点, 磁感应强度 B 有极值。而 B 对 x 的二阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} \right) &= \frac{\mathrm{d}^2 B}{\mathrm{d}x^2} = \\ &= -\frac{3\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} - \frac{5 \left(x + \frac{a}{2} \right)^2}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{7}{2}}} + \frac{1}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{5}{2}}} - \frac{5 \left(x - \frac{a}{2} \right)^2}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{\frac{7}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

由 $\frac{d^2 B}{dx^2}|_{x=0} = 3\mu_0 I R^2 \frac{a^2 - R^2}{\left[R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{\frac{7}{2}}}$, 可知:

当 $a > R$ 时, $\frac{d^2 B}{dx^2}|_{x=0} > 0$, 即在 O 点的磁感应强度 B 有极小值;

当 $a < R$ 时, $\frac{d^2 B}{dx^2}|_{x=0} < 0$, 即 O 点的磁感应强度 B 有极大值;

当 $a = R$ 时, $\frac{d^2 B}{dx^2}|_{x=0} = 0$, 说明磁感应强度 B 在 O 点为极值点, 且为

$$B_{x=0} = 2 \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left[R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = 0.761 \frac{\mu_0 I}{R}$$

进一步求在 O_1 、 O_2 点及在两侧各 $R/4$ 处的 Q_1 、 Q_2 两点的磁感应强度, 分别都等于

$$B_O = B_{O_1} = B_{O_2} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{1}{R} + \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + R^2)^{3/2}} = 0.677 \frac{\mu_0 I}{R}$$

$$B_Q = B_{Q_1} = B_{Q_2} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[R^2 + (R/4)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[R^2 + (3R/4)^2]^{3/2}} = 0.712 \frac{\mu_0 I}{R}$$

可见, 在线圈上其他各点, 磁感应强度的量值都介于 B_O 和 $B_{x=0}$ 之间, 比较 $B_{x=0}$ 、 B_Q 、 B_O 的变化可知, 在 $x=0$ 附近的磁场基本是均匀的, 可看成均匀磁场。

注意: 由一对半径相同的同轴 N 匝载流线圈组成的系统称为亥姆霍兹线圈 (Helmholtz coil)。在实验室中, 常用这种线圈产生所需要的不太强的均匀磁场, 比用长直螺线管获取均匀磁场更方便。

例 5-3 无限长直线电流 I_1 与直线电流 I_2 共面, 直线电流 I_2 两端分别距直线电流 I_1 的距离为 a 和 b , 几何位置如图 5.4 所示, 试求直线电流 I_2 受到电流 I_1 产生的磁场的作用力。

分析: 本题为直线电流 I_2 在非均匀磁场中受到安培力的问题。应先由安培环路定理确定长直线电流 I_1 的磁场分布, 再求出电流 I_2 上各电流元在磁场中所受的安培力。

解: 无限长直线电流 I_1 在电流元 $I_2 dl$ 处产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

设电流元 $I_2 dl$ 到长直线电流 I_1 的距离为 x , 则电流元 $I_2 dl$ 受到的安培力为 $d\mathbf{F} = I_2 dl \times \mathbf{B}$, 注意 $I_2 dl$ 垂直于 \mathbf{B} , 同时考虑 $dx = dl \cos 60^\circ$, 故直线电流 I_2 受到安培力的大小为

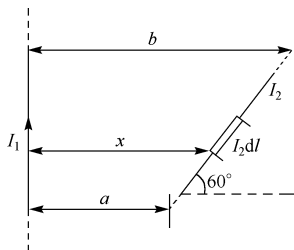


图 5.4 例 5-3 图

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \cdot \frac{dx}{\cos 60^\circ}$$

积分得

$$F = \int_a^b \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \cdot \frac{dx}{\cos 60^\circ} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

长直线电流 I_2 受到安培力的方向为垂直于长直线电流 I_2 斜向上。

例 5-4 如图 5.5 所示, 一个带有电荷 q ($q > 0$) 的粒子, 以速度 v 平行于均匀带电的长直导线运动, 该导线的线电荷密度为 λ ($\lambda > 0$), 并载有传导电流 I 。试问粒子要以多大的速度运动, 才能使其保持在一条与导线距离为 d 的平行线上?

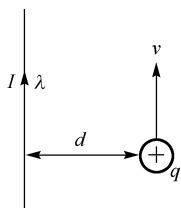


图 5.5 例 5-4 图

分析: 如题图所示, 带电粒子既在电场中又在磁场中运动, 此时粒子将受到磁场向左的洛伦兹力 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 作用和向右的静电力 $q\mathbf{E}$ 作用, 当这两个力平衡时, 此粒子将保持在一条与导线距离为 d 的平行线上运动。

解: 由安培环路定理 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$ 知, 电流 I 在 q 处产生的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

方向垂直纸面向里 “ \otimes ”。

运动电荷 q 受到的洛伦兹力 $\mathbf{F}_{\text{洛}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, 方向向左, 大小为

$$F_{\text{洛}} = qvB = \frac{qv\mu_0 I}{2\pi d}$$

同时由于导线的线电荷密度为 λ , 在 q 处产生的电场强度可用高斯定理求得, 为

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \mathbf{e}_r$$

\mathbf{e}_r 沿垂直导线的径向方向。因 q 受到的静电力 $\mathbf{F}_{\text{静}} = q\mathbf{E}$, 方向向右, 大小为

$$F_{\text{静}} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

欲使粒子保持在一条与导线距离为 d 的平行线上, 需 $\mathbf{F}_{\text{洛}} = \mathbf{F}_{\text{静}}$, 即

$$\frac{qv\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

解此方程, 可得

$$v = \frac{\lambda}{\mu_0 \epsilon_0 I}$$

例 5-5 截面积为 S 、密度为 ρ 的铜导线被弯成正方形的三边，可以绕水平轴 OO' 转动，如图 5.6 所示。导线放在竖直向上的匀强磁场中，当导线中的电流为 I 时，导线离开原来的竖直位置偏转一个角度 θ 而平衡，求磁感应强度。

分析：载流线圈在磁场中将受到磁场对它施加的磁力矩作用，同时线圈由于有一定质量，因而还将受到重力矩作用，线圈平衡时重力矩等于磁力矩。

解：设正方形的边长为 a ，质量为 m ($m = \rho aS$)，平衡时重力矩等于磁力矩。由于

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

式中 \mathbf{m} 为线圈磁矩，磁力矩的大小为

$$M = B I a^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = B I a^2 \cos\theta$$

重力矩为

$$M = m g a \sin\theta + 2 m g \cdot \frac{a}{2} \sin\theta = 2 m g a \sin\theta$$

线圈平衡时，有

$$B I a^2 \cos\theta = 2 m g a \sin\theta$$

所以，磁感应强度的大小为

$$B = \frac{2 m g}{I a} \tan\theta = \frac{2 \rho g S}{I} \tan\theta$$

例 5-6 一圆柱形无限长导体，磁导率为 μ ，半径为 R ，通有沿轴线方向的均匀电流 I ，求：(1) 导体内任一点的 H 、 B 和 M ；(2) 导体外任一点的 H 、 B 。

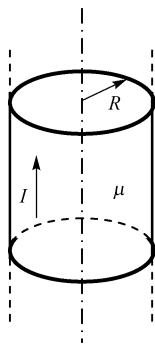


图 5.7 例 5-6 图

分析：应用有磁介质时的安培环路定理，可求出载流导体内的磁场强度；再应用磁场强度与磁感应强度之间的关系 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ，求出 H 、 B ；对于导体外的 H 、 B ，可直接应用安培环路定理求解。

解：(1) 如图 5.7 所示，当 $r < R$ 时，导体的电流密度为 $i = \frac{I}{\pi R^2}$ 。

由 $\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$ ，有 $2\pi r \cdot H_1 = \pi r^2 i$ ，所以，导体内任一点的磁场强度大小为

$$H_1 = \frac{I r}{2\pi R^2}$$

再由 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ，导体内任一点的磁感应强度大小为

$$B_1 = \frac{\mu I r}{2\pi R^2}$$

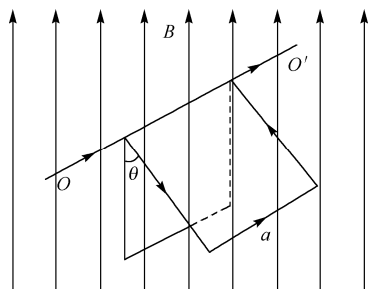


图 5.6 例 5-5 图

应用公式 $M = \frac{B}{\mu_0} - H$ ，可得磁化强度的大小为

$$M = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu I r}{2\pi R^2} - \frac{I r}{2\pi R^2} = \frac{I r}{2\pi R^2} \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right)$$

(2) 当 $r > R$ 时，应用 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$ ，则有导体外任一点的磁场强度大小为

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

磁感应强度

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

例 5-7 试证明：在均匀磁场中，任意形状的平面载流线圈受到的磁场力的合力为零，设磁场方向沿线圈的磁矩方向。

分析：该题目给出了两个条件，一是均匀磁场，即 \mathbf{B} 为恒矢量；二是恒定电流，即 I 为常量。在这两个条件下，运用安培定理计算磁场力时可将电流 I 和磁感应强度 \mathbf{B} 移到积分号外面，从而可以给出证明。

证明：对于任意形状的平面通电线圈 L ，受到的磁场力的合力为

$$\mathbf{F} = \oint_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

亦即

$$\mathbf{F} = I \left(\oint_L d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B}$$

由于线圈是闭合平面线圈，矢量沿闭合路径积分应应为零，即有

$$\oint_L d\mathbf{l} = 0$$

故平面载流线圈，在均匀磁场中受到磁场力的合力

$$\mathbf{F} = \oint_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = 0$$

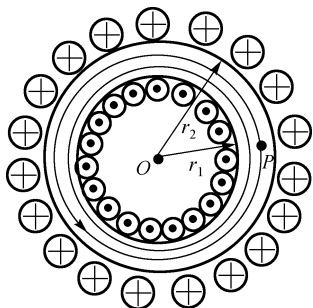


图 5.8 例 5-8 图

证毕。

例 5-8 如图 5.8 所示，螺绕环内通有电流 20 A，环上所绕线圈共 400 匝，环的平均周长为 40 cm，环内磁感应强度为 1.0 T，计算：(1) 磁场强度；(2) 磁化强度；(3) 磁化率；(4) 磁化面电流和相对磁导率。

分析：绕在环形管上的一组圆形电流形成螺绕环。如果环上的线圈绕得很紧密，则磁场几乎全部集中在螺绕环内，

环外磁场接近于零。由于对称性，环内磁场的磁感应线都是一些同心圆，圆心在通过环心且垂直于环面的直线上。在同一条磁感应线上各点磁感应强度的量值相等，方向处处沿圆环的切线方向，并与环面平行。

为了计算管内某一点 P 的磁感应强度，可选择通过 P 点的磁感应线 L 作为积分回路，由于线上任一点的磁场强度 H 的量值相等，方向都与 $d\mathbf{l}$ 同向。

解：由磁场 H 矢量的环流，有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \int_L dl = H 2\pi r$$

式中 r 为回路半径，由安培环路定理得

$$H \cdot 2\pi r = NI$$

(1) 考虑 $2\pi r = L$ 、 $B = \mu H = 1.0\text{T}$ ，所以磁场强度大小为

$$H = \frac{N}{L} I = \frac{400}{0.4} \times 20 = 2 \times 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

(2) 由磁感应强度 B 、磁场强度 H 和磁化强度 M 之间的普遍关系得，磁化强度的大小为

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7}} - 2 \times 10^4 = 7.76 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

(3) 因为磁化率 $\chi_m = \mu_r - 1$ ，而 $\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$ ，所以

$$\chi_m = \frac{B}{\mu_0 H} - 1 = 39.8 - 1 = 38.8$$

(4) 磁化面电流密度

$$\sigma_s = M = \frac{B}{\mu_0} - H = 7.76 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

则磁化面电流为

$$i_s = \sigma_s L = 7.76 \times 10^5 \times 0.4 = 3.1 \times 10^5 \text{ A}$$

相对磁导率为

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = 39.8 \quad \text{或} \quad \mu_r = \chi_m + 1 = 38.8 + 1 = 39.8$$

2. 习题解答

5.1 如图 5.9 所示，哪一个 $B-x$ 曲线能确切描述载流圆线圈在其轴线上任一点所产生的磁感应强度 B 随 x 的变化关系（ x 轴垂直于圆线圈平面，原点在圆线圈中心 O ）？（ ）

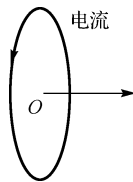
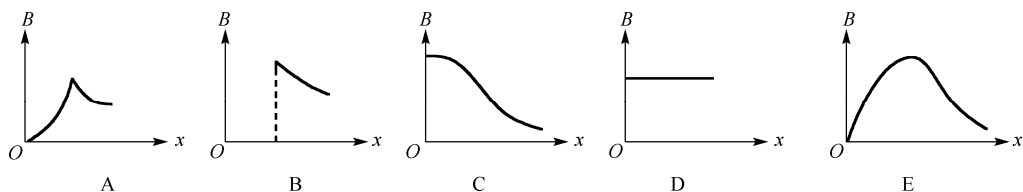


图 5.9 题 5.1 图



分析与解: 由毕奥-萨伐尔定律计算, 可得载流圆线圈轴线上任意点的磁感应强度,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{(R^2 + x^2)^{3/2}} e_x. \text{ 当 } x=0 \text{ 时, } B = \frac{\mu_0 I}{2R} e_x, \text{ 大小为一定值; 当 } x \gg R \text{ 时,}$$

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2x^3} e_x = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3}, \quad m = IS e_x, \quad |B| \text{ 随 } x^{-3} \text{ 而变化, 所以正确选项为 C.}$$

5.2 如图 5.10 所示, 边长为 a 的正方形线圈中通有电流 I , 则此线圈在 A 点产生的磁感强度的大小为 ().

- A. $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}$ B. $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi a}$ C. $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$ D. 以上均不对

分析与解: 由毕奥-萨伐尔定律分别求正方形各边电流在 A 点的磁感应强度, 然后再叠加。

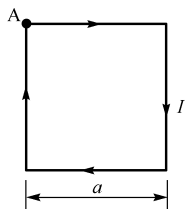


图 5.10 习题 5.2 图

由定律可知与 A 点相邻两边由于 $Id\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r = 0$, \mathbf{e}_r 是电流元指向场点的单位矢量, 所以与 A 点相邻两边电流磁感应强度的贡献为零; 与 A 不相邻

两边产生的磁感应强度由例 5-1 导出的公式 $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha$ 计算,

积分后有 $B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$. 所以对题图所示的下面边取 $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$,

$\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, 即 $B_{\text{下}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; 对面边取 $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$,

$\alpha_2 = \pi - \frac{\pi}{4}$, 即 $B_{\text{对}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; 而 $B_{\text{下}}$ 、 $B_{\text{对}}$ 在 A 点的方向都垂

直纸面向里, 故 $B_A = B_{\text{下}} + B_{\text{对}} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}$. 故正确选项为 A.

5.3 载流的圆形线圈 (半径 a_1) 与正方形线圈 (边长 a_2) 通有相同电流 I . 如图 5.11 所示, 若两个线圈的中心 O_1 、 O_2 处的磁感应强度大小相同, 则 $a_1 : a_2$ 为 ().

- A. 1 : 1 B. $\sqrt{2}\pi : 1$ C. $\sqrt{2}\pi : 4$ D. $\sqrt{2}\pi : 8$

分析与解: 求出两线圈在中心的磁感应强度, 作比较即可得到 $a_1 : a_2$. 载流圆线圈在

中心 O_1 的磁感应强度为 $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2a_1}$, 矩形线圈在中心 O_2

的磁感应强度为 $|B_2| = \left| 4 \left(-\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \alpha \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \right) \right| = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a_2}$,

由 $B_1 = |B_2|$, 即有 $a_1 : a_2 = \sqrt{2}\pi : 8$, 故选 D 正确。

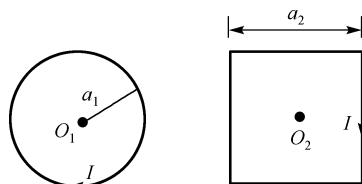


图 5.11 习题 5.3 图

5.4 有一无限长通电流的扁平铜片, 如图 5.12 所

示, 宽度为 a , 厚度不计, 电流 I 在铜片上均匀分布, 在铜片外与铜片共面, 离铜片右边缘为 b 处的 P 点的磁感应强度 B 的大小为 ()。

- A. $\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$ B. $\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{a+b}{b}$
 C. $\frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{b}$ D. $\frac{\mu_0 I}{\pi(a+2b)}$

分析: 在铜片中取一宽度为 dx 的导电直线, 由于该铜片的面电流密度为 $j = I/a$, 则宽度为 dx 的导电直线中电流为 $di = \frac{I}{a} dx$, 该电流在 P 点处激发的磁感应强度为 $dB = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I/a}{(a+b-x)} dx$, 对 x

从 $0 \rightarrow a$ 积分, 则有 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{a+b}{b}$, 故正确选项为 B。

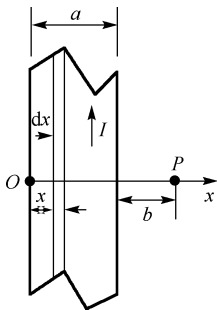


图 5.12 习题 5.4 图

5.5 取一闭合积分回路 L , 使三根载流导线穿过它所围成的面。现改变三根导线之间的相互间隔, 但不越出积分回路, 则 ()。

- A. 回路 L 内的 $\sum I_i$ 不变, L 上各点的 B 不变
 B. 回路 L 内的 $\sum I_i$ 不变, L 上各点的 B 改变
 C. 回路 L 内的 $\sum I_i$ 改变, L 上各点的 B 不变
 D. 回路 L 内的 $\sum I_i$ 改变, L 上各点的 B 改变

分析: 在安培环路定理 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ 中, 环路上任一点的磁感应强度 \mathbf{B} 应是空间中所有电流在该点所激发的, 包括环内、环外电流。电流的分布发生变化, 那么环路上各点的 B 将改变; 但式中 $\sum I_i$ 只包含环内的电流, 与环内电流分布无关, 也与环外电流无关。所以应选 B。

5.6 一载有电流 I 的细导线分别均匀密绕在半径为 R 和 r 的长直圆筒上形成两个螺线管 ($R = 2r$), 两螺线管单位长度上的匝数相等。两螺线管中的磁感应强度大小 B_R 和 B_r 应满足 ()。

- A. $B_R = 2B_r$ B. $B_R = B_r$ C. $2B_R = B_r$ D. $B_R = 4B_r$

分析: 由螺线管中的磁感应强度大小公式 $B = \mu_0 nI$ 知, 螺线管内磁感应强度的大小不依赖于螺管的直径和长度, 即半径为 R 和 r 的长直螺线管的磁感应强度相等, 所以有 $B_R = B_r$, 故应选 B。

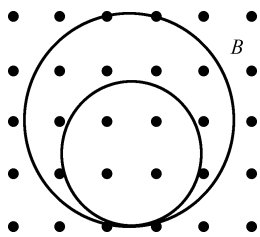


图 5.13 习题 5.7 图

5.7 一均匀磁场, 其磁感应强度方向垂直于纸面, 两带电粒子在磁场中的运动轨迹如图 5.13 所示, 则 ()。

- A. 两粒子的电荷必然同号
 B. 粒子的电荷可以同号也可以异号
 C. 两粒子的动量大小必然不同
 D. 两粒子的运动周期必然不同

分析: 带电粒子在均匀磁场中运动, 如果均垂直进入磁场, 粒子由于受洛伦兹力 $\mathbf{f}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 作用, 其运动轨迹都为圆形, 圆周半径为 $R = \frac{mv}{qB}$, 可见粒子做圆周运动与电

荷性质无关, 故答案 A 是错的; 在磁场相同的情况下, 轨道半径除与粒子的动量有关外, 还与粒子所带电量有关, 故答案 C 是错的; 由于粒子运动一周的时间(周期)是 $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{qB}$, 故对于 m 、 q 相同的粒子, 运动周期是相同的, 所以答案 D 是错误的;

进入磁场的粒子可以同号也可以异号, 它们在磁场中的轨迹与粒子进入磁场的速度 v 大小有关, 速度 v 大则回旋半径 R 也大; 所以该题只有 B 选项是正确的。

5.8 磁场中某点处的磁感应强度 $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}$, 电荷量为 q 的粒子以速度 $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$ 通过该点, 则作用于该电子上的磁场力的大小为 ()。

- A. $|q(v_x + v_y)(B_x + B_y)|$ B. $|q(v_x B_x + v_y B_y)|$
C. $|q(v_x B_y + v_y B_x)|$ D. $|q(v_x B_y - v_y B_x)|$

分析: 带电粒子在磁场中运动所受磁场力为 $\mathbf{f}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} =$

$q(v_x B_y - v_y B_x) \mathbf{i}$, $|\mathbf{f}_m| = |q(v_x B_y - v_y B_x)|$, 故 D 选项是正确的。

5.9 一长直载流导线, 沿空间直角坐标系 Oy 轴放置, 电流沿 y 轴正向。在原点 O 处取一电流元 Idl , 则该电流元在 $(a, 0, 0)$ 点处的磁感应强度的大小为 _____, 方向为 _____。

分析: 本题实际上是求距载流直导线为 a 的任一点处的磁感应强度, 由毕奥-萨伐尔定律, 有 $B_{(a,0,0)} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi a^2}$, 方向是过 a 点沿 z 轴负向。

5.10 电子在磁感应强度为 B 的均匀磁场中沿半径为 R 的圆周运动, 电子运动所形成的等效圆电流 $I =$ _____; 等效圆电流的磁矩 $\mathbf{m} =$ _____。(已知电子电量的大小为 e , 电子的质量为 m 。)

分析: 电子轨道半径 $R = \frac{mv}{eB}$, 周期 $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{eB}$, 等效电流 $I = \frac{e}{T} = \frac{e^2 B}{2\pi m}$; 等效圆电流的磁矩 $\mathbf{m} = I S \mathbf{e}_n = \frac{e^2 B}{2\pi m} \cdot \pi R^2 \mathbf{e}_n = \frac{e^2 B R^2}{2m} \mathbf{e}_n$ 。

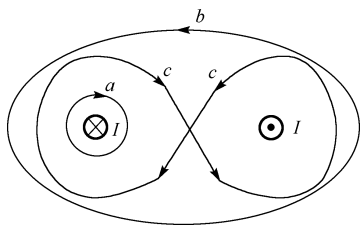


图 5.14 习题 5.11 图

5.11 两根长直导线通有电流 I , 如图 5.14 所示, 有 a 、 b 、 c 三种环路, 在每种情况下, $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 等于 _____ (对环路 a), _____ (对环路 b), _____ (对环路 c)。

分析: 由安培环路定理可知, 对环路 a 的环流为 $\mu_0 I$; 对环路 b 的环流为 0 ; 对环路 c 的环流为 $2\mu_0 I$ 。

5.12 一边长为 $l = 0.15 \text{ m}$ 的立方体, 如图 5.15 所示放置, 有一均匀磁场 $\mathbf{B} = (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}) \text{ T}$ 通过立方体所

在区域, 则通过立方体阴影面积的磁通量为_____; 通过立方体六面的总磁通量为_____。

分析: 磁感应线是闭合线, 通过任一闭合线曲面的磁通量为零。对于闭合曲面, 通常取其外表面的法线方向为正, 故阴影面的法向沿 Ox 轴正向, 大小为 $S = l^2 \mathbf{i}$ 。所以通过阴影面积的磁通量为 $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 1.5\mathbf{k}) \cdot (0.15)^2 \mathbf{i} = 0.135 \text{ Wb}$; 立方体的6个面构成闭合曲面, 由磁场的高斯定理可知, 通过立方体的总磁通量为零, 即 $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = 0$ 。

5.13 有一由 N 匝细导线绕成的平面正三角形线圈, 边长为 a , 通有电流 I , 置于均匀外磁场 B 中, 当线圈平面的法向与外磁场同向时, 该线圈所受的磁力矩大小为 $M_m =$ _____。

分析: 当线圈平面的法向与外磁场同向时, 该线圈所受的磁力矩大小为 $M_m = N |\mathbf{m} \times \mathbf{B}| = NISB$, 其中 $S = \frac{1}{2} a \cdot a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ 。故 $M_m = NISB = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} NIB$ 。

5.14 如图 5.16 所示, 有两无限大平行载流平面, 它们的面电流密度均为 j , 电流方向相反, 求两载流平面之间及两面之外空间的磁感应强度。

分析: 根据对称性分析, 无限大载流平面两侧与平面等距离处的磁感应强度 B 的大小相等, 方向相反, 它们均平行于载流平面, 且与电流方向垂直, 方向如图 5.16(b)所示。现取图 5.16(a)所示的矩形回路 $abcd$, 其中 $ab \parallel OO' \parallel cd$, ab 、 cd 到平面的距离相等, $ad \perp OO'$, $cb \perp OO'$, 且 $ab = cd = L$ 。然后根据安培环路定理可解得磁感应强度 B 的分布, 最后再根据磁场叠加原理可求得两无限大载流平面各区域的磁感应强度分布。

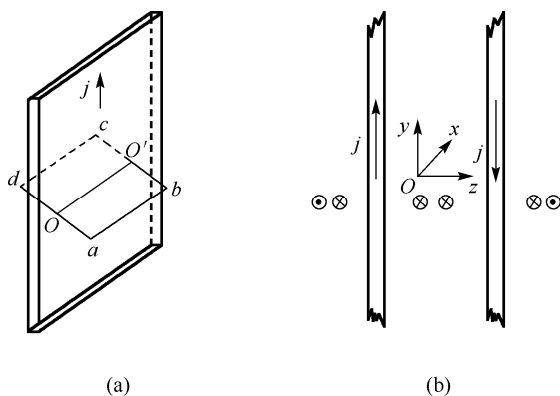


图 5.16 习题 5.14 图

解: 取如图 5.16(a)所示的矩形回路 $abcd$ 。根据安培环路定理, 于是

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ab} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{B}_4 \cdot d\mathbf{l}$$

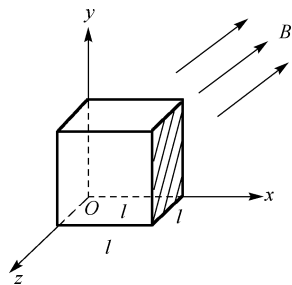


图 5.15 习题 5.12 图

由于对称性, 故有 $B_1 = B_2 = B$, B_3 和 B_4 与积分路径正交, 因而

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2BL$$

而回路 $abcd$ 内包围的电流 $\sum I = jL$ (j 为单位长度的电流密度)。所以根据安培回路定理, 有

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2BL = \mu_0 jL$$

故对于单一无限大平行载流平面两侧磁感应强度的大小为

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 j$$

根据磁场叠加原理可求得两无限大载流平面各区域的磁感应强度分布, 在两载流平面之间, 若取垂直于纸面向里为 x 轴的正向, 如图 5.16(b) 所示, 则合磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 j \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mu_0 j \mathbf{i} = \mu_0 j \mathbf{i}$$

同理, 在两载流导体平面外侧, 合磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 j \mathbf{i} - \frac{1}{2} \mu_0 j \mathbf{i} = 0$$

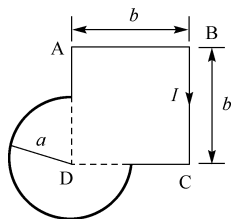


图 5.17 习题 5.15 图

5.15 将通有电流 I 的导线在同一平面内弯成如图 5.17 所示的形状, 求 D 点的磁感应强度 B 的大小。

分析: 本题是求 $3/4$ 圆线圈电流和边长为 b 的通电正方形线圈在 D 点的磁感应强度。因此, 可分成两部分分别求解, 再应用叠加原理进行叠加。

解: $3/4$ 圆线圈电流在 D 点产生的磁感应强度为

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{a^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\theta}{a}$$

对上式积分, θ 取 $0 \rightarrow 3\pi/2$, 故

$$B_1 = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{3\pi/2} d\theta = \frac{3\mu_0 I}{8a}$$

方向垂直纸面向里 “ \otimes ”。由习题 5.2 可知正方形 AB、BC 边在 D 点的磁感应强度为

$$B_2 = B_{AB} + B_{BC} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi b}$$

方向也是垂直纸面向里 “ \otimes ”。所以, D 点总的磁感应强度 B 的大小为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{8a} + \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi b} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{3\pi}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{b} \right)$$

5.16 无限长直导线折成 V 形, 顶角为 θ , 置于 Oxy 平面内, 一个角边与 x 轴重合,

如图 5.18 所示。当导线中有电流 I 时, 求 y 轴上一点 $P(0, a)$ 处的磁感应强度大小。

分析: 本题为两半无限长直线电流在点 $P(0, a)$ 处磁感应强度的叠加, 由例 5-1 导出的公式 $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha$ 计算 (式中 b 为直线电流到场点的距离), 积分后有 $B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ 。沿 x 轴重合

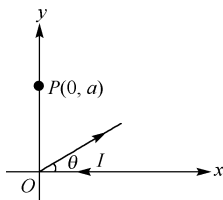


图 5.18 习题 5.16 图

边的直线电流, 取 $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, 则有 B_1 ; 与 x 轴夹角为 θ 的边的直线电流, 因 $P(0, a)$ 点距该直线电流距离为 $a \cos \theta$, 取 $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\alpha_2 = 0$, 则有 B_2 。 $P(0, a)$ 点的磁感应强度为 B_1 、 B_2 相叠加。

解: 沿 x 轴重合边的电流, 取 $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, 则有

$$B_1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

方向垂直纸面向里。与 x 轴夹角为 θ 的边的直线电流, 考虑 $P(0, a)$ 点距该直线电流距离为 $a \cos \theta$, 取 $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\alpha_2 = 0$, 则有

$$B_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a \cos \theta} \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a \cos \theta} (1 - \sin \theta)$$

方向垂直纸面向外。故, $P(0, a)$ 点总磁感应强度为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} - \frac{\mu_0 I}{4\pi a \cos \theta} (1 - \sin \theta)$$

5.17 已知半径为 R 的载流圆线圈与边长为 a 的载流正方形线圈的磁矩之比为 2:1, 且载流圆线圈在中心 O 处产生的磁感应强度为 B_0 , 求在正方形线圈中心 O' 处的磁感应强度的大小。

分析: 由载流圆线圈在中心处的磁感应强度为 B_0 , 求出圆线圈中的电流, 再由两线圈磁矩之比, 求出正方形线圈中的电流, 从而可求出正方形线圈中心的磁感应强度。

解: 半径为 R 的载流圆线圈在中心的磁感应强度大小为 $B = \frac{\mu_0 I_1}{2R}$, 所以 $I_1 = \frac{2RB}{\mu_0}$; 又由载流线圈磁矩关系 ($m = ISe_n$), 有 $m_{\text{圆}} : m_{\text{正}} = I_1 \pi R^2 : I_2 a^2 = 2:1$, 所以有

$$I_2 = \frac{I_1 \pi R^2}{2a^2} = \frac{\pi R^2}{2a^2} \cdot \frac{2RB}{\mu_0} = \frac{\pi R^3 B}{\mu_0 a^2}$$

由习题 5.3 可知, 正方形载流线圈在中心的磁感应强度为 $|B| = \left| 4 \left(-\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \alpha \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \right) \right| =$

$\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$ 。所以, 正方形线圈中心 O' 处的磁感应强度的大小为

$$|B| = \frac{2\sqrt{2}\mu_0}{\pi a} \cdot I_2 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0}{\pi a} \cdot \frac{\pi R^3 B_0}{\mu_0 a^2} = 2\sqrt{2} B_0 \frac{R^3}{a^3}$$

5.18 如图 5.19 所示, 半径为 R 的均匀带电薄圆盘, 总电量为 Q 。令此盘绕通过盘心且垂直盘面的轴线做匀速转动, 角速度为 ω 。求证: 圆环中心 O 处的磁感应强度大小为 $B = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R}$, 并指出 B 的方向。

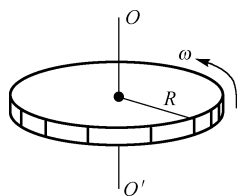


图 5.19 习题 5.18 图

分析: 可将带电圆盘视为由若干带电圆环组成, 求出距中心为 r 的任意一个带电圆环中电流在中心 O 处的磁感应强度大小 dB , 然后 r 从 $0 \rightarrow R$ 积分, 从而求出总带电量为 Q 的薄圆盘以角速度 ω 转动时, 在中心的磁感应强度。

证明: 设半径为 r 、宽度为 dr 任意一个带电圆环, 其带电量 $dq = 2\pi r dr \cdot \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{2Q}{R^2} r dr$, 当环以角速度 ω 转动时, 环上等价于一个圆电流, 其大小为

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{2Q}{R^2} r dr / (2\pi / \omega) = \frac{Q\omega}{\pi R^2} r dr$$

该电流在中心产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} dr$$

积分得

$$B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R}$$

方向垂直盘面向上。证毕。

5.19 如图 5.20 所示, 长直线电流 I_1 附近有一直角三角形线框 ABC , 通以电流 I_2 , 两者共面, 试求电流 I_1 的磁场分别对线框三条边的作用力。

分析: 该题是平面通电线圈在非均匀磁场中受到的安培力问题, 应先确定长直载流导线的磁场分布, 分别求出直角三角形上三条边受到的安培力。

解: 长直线电流 I_1 在三角形线框各边产生的磁感应强度是不均匀的, 与导线相距为 r 处的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

方向垂直纸面向里。

由于 AB 段上磁感应强度都相等, 所以它受到的磁场力大小为

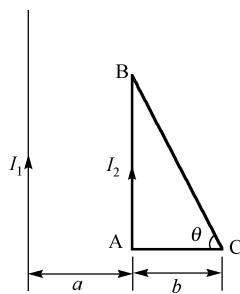


图 5.20 习题 5.19 图

$$F_{AB} = \int_0^{b \tan \theta} I_2 B dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} b \tan \theta$$

方向在纸平面内，并垂直 AB 向左。

在 AC 上取电流元 $I_2 dl$ ，电流元距长电流 I_1 为 r ，则 AC 段受到的磁场力大小为

$$F_{AC} = \int_a^{a+b} I_2 B dl = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \ln \frac{a+b}{a}$$

方向在纸面内，垂直 AC 向下。

同理求得 BC 段受到的磁场力大小为

$$F_{BC} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \frac{dr}{\cos \theta} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \cos \theta} \ln \frac{a+b}{a}$$

方向在纸平面内，垂直 BC，指向框外。

5.20 如图 5.21 所示，两共轴圆线圈，半径分别为 R_1 、 R_2 ，电流分别为 I_1 、 I_2 。电流的方向相反，求轴线上距离中点 O 为 x 处的 P 点的磁感应强度。

分析：分别计算两圆线圈在中轴线上产生的磁感应强度，然后再进行叠加。

解：载流圆线圈在 x 轴上任意 P 点的磁感应强度公式为

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

所以，两共轴圆线圈在 P 点的磁感应强度 B_1 、 B_2 分别为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2[R_1^2 + (b+x)^2]^{3/2}}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2[R_2^2 + (b-x)^2]^{3/2}}$$

B_1 沿 x 轴正向、 B_2 沿 x 轴负向，所以总磁感应强度为

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0}{2} \left\{ \frac{I_1 R_1^2}{[R_1^2 + (b+x)^2]^{3/2}} - \frac{I_2 R_2^2}{[R_2^2 + (b-x)^2]^{3/2}} \right\}$$

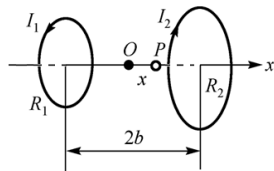


图 5.21 习题 5.20 图

5.21 一根同轴线由半径为 R_1 的长导线和套在它外面内半径为 R_2 、外半径为 R_3 的同轴导体圆筒组成。中间充满磁导率为 μ 的各向同性均匀非铁磁绝缘材料，如图 5.22(a)所示，传导电流 I 沿导线向上流去，由圆筒向下流回，在它们的截面上电流都是均匀分布的。求同轴线内外的磁感应强度 B 的分布。

分析：同轴线无限长，导线横截面上电流分布均匀，在导线的横截面内以截面的中心为圆心，取不同的半径 r 作圆，并以此为积分环路。在每个环路上，磁感应强度的大小相

等, 方向均沿圆周切线方向。应用安培环路定理 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$, 可求出各区域的磁感应强度 B 的分布。

解: (1) 在 $r < R_1$ 时, 由安培环路定理 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_1 \oint_l d\mathbf{l} = B_1 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2$, 有

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

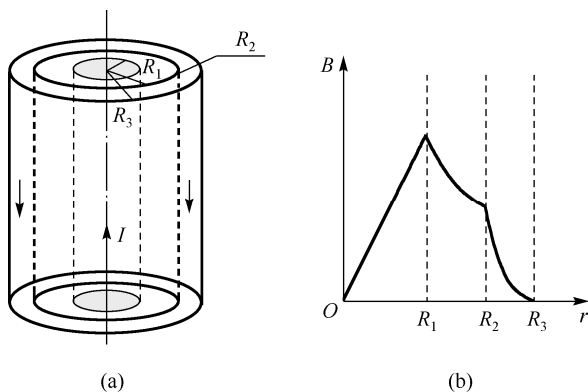


图 5.22 习题 5.21 图

(2) 在 $R_1 < r < R_2$ 时, 穿过回路的合电流为 I , 由于在介质中, 用介质中的安培环路定理 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H 2\pi r = I$, 故有

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

由于在这个区域充满磁导率为 μ 的各向同性均匀非铁磁绝缘材料, 所以

$$B_2 = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

(3) 在 $R_2 < r < R_3$ 时, 穿过环路的电流为

$$I_2 = I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \cdot \pi(r^2 - R_2^2) = I \left[1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right]$$

所以, $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_3 2\pi r = \mu_0 I_2$, 即有

$$B_3 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \left[1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right]$$

(4) 在 $r > R_3$ 时, 穿过环路的电流为 0, 即

$$\oint_l \mathbf{B}_4 \cdot d\mathbf{l} = B_4 \oint_l d\mathbf{l} = 0$$

$$B_4 = 0$$

在各区间磁感应强度 B 随 r 的变化 ($B-r$) 曲线如图 5.22(b) 所示。

5.22 螺绕环中心周长 $l=10\text{ cm}$ ，环上均匀密绕线圈 $N=200$ 匝，线圈中通有电流 $I=0.1\text{ A}$ 。管内充满相对磁导率 $\mu_r=4200$ 的磁介质。求管内磁场强度和磁感应强度的大小。

分析：在螺线管内磁场强度、磁感应强度是近似均匀的，方向与螺线管轴方向平行。当长度远大于管直径时管可视为无限长直螺线管，无限长直螺线管内的磁感应强度的大小不依赖于螺线管的直径或长度。

解：由于管内充满介质，所以用有介质时的安培环路定理 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H 2\pi r = NI$ ，故

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{NI}{l} = \frac{200 \times 0.1}{0.1} = 200 \text{ A/m}$$

$$\begin{aligned} B &= \mu H = \mu_0 \mu_r n I \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \times 4200 \times 200 = 1.06 \text{ T} \end{aligned}$$

5.23 如图 5.23(a) 所示，一半径为 R 的无限长半圆柱面导体，载有与位于其轴线上的长直导线上等值反向电流 I ，试求轴线上长直导线单位长度所受到磁力的大小。

分析：该题的关键是确定无限长载流半圆柱面电流在轴线上的磁感应强度。而无限长半圆柱面金属导体可看成是由许多无限长直导线电流组成的。所以，轴线上任一点 O 的磁感应强度是所有载流导线产生磁场的矢量叠加。且无限长直载流导线的磁感应强度可用公式计算，并将磁感应强度沿各坐标轴分解后积分求解。确定了轴线处的磁感应强度后，不难根据安培定理计算磁场力。

解：设无限长半圆柱面导体中的电流流动方向垂直于纸面向外，轴线上的长直导线中的电流方向垂直纸面向里。无限长半圆柱面导体由许多宽为 $d\mathbf{l} = R d\theta$ 的无限长直线电流元构成，如图 5.23(b) 所示，电流元的电流为

$$dI = \frac{I}{\pi R} \cdot R d\theta = \frac{I}{\pi} \cdot d\theta$$

它在 O 点处产生的磁感应强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \cdot d\theta$$

方向如图 5.23(b) 所示，将 dB 按坐标轴分解并积分得

$$B_x = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \theta \cdot d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$B_y = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \cos \theta \cdot d\theta = 0$$

方向沿 x 轴正向。所以，轴线上长度为 L 的直导线所受的沿负 y 轴方向的磁力为

$$F = ILB = IL \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

则轴线上单位长度所受的磁力为

$$f = \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}$$

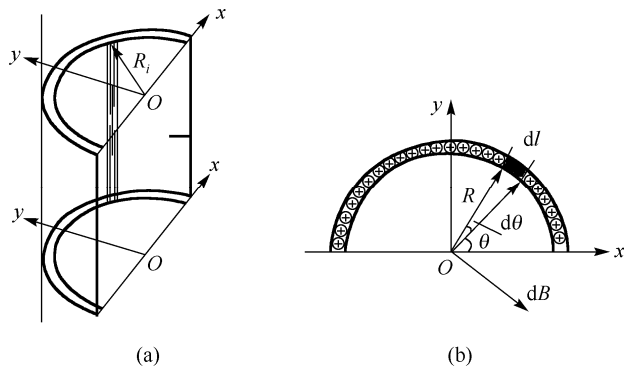


图 5.23 习题 5.23 图

5.24 如图 5.24(a)所示,一半径为 R_1 的无限长圆柱形直导线外包裹着一层外径为 R_2 的圆筒形均匀介质,其相对磁导率为 μ_r ,导线内通有电流强度为 I 的恒定电流,且电流在导线横截面均匀分布。求:

(1) 磁感应强度和磁场强度的径向分布,并画出 $B-r$ 、 $H-r$ 曲线。

(2) 介质内、外表面的磁化面电流密度。(设金属导线的 $\mu_r = 1$ 。)

分析: 利用介质中的安培环路定理: $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$, 考虑到导线内电流密度为 $i = \frac{I}{\pi R_1^2}$, 可求出各区域的磁场分布。

解: 按题意, 磁场分布具有圆柱形对称分布, 因此可由介质中的安培环路定理计算。

(1) 当 $r < R_1$ 时, 有 $H_1 \cdot 2\pi r = \pi r^2 i$, 得

$$H_1 = \frac{I r}{2\pi R_1^2}, \quad B_1 = \mu H_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

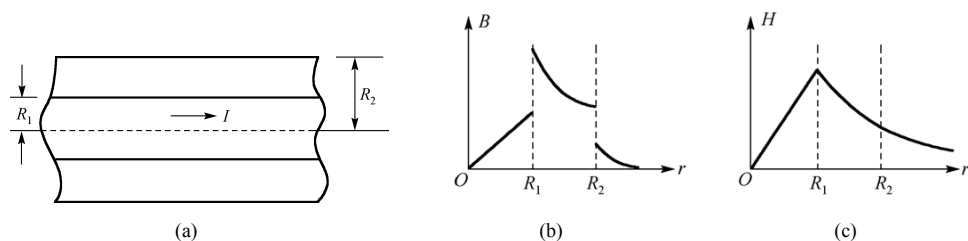
当 $R_1 < r < R_2$ 时, 有 $H_2 \cdot 2\pi r = I$, 得

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_2 = \mu H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

当 $r > R_2$ 时, 有 $H_3 \cdot 2\pi r = I$, 得

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_3 = \mu H_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁感应强度和磁场强度按径向分布的 $B-r$ 、 $H-r$ 曲线, 如图 5.24(b)、(c)所示。

图 5.24 习题 5.24 图及 $B-r$ 、 $H-r$ 曲线图

(2) 当 $r = R_1$ 时, 有 $M_1 = \frac{B_1}{\mu_0} - H_1$, 即

$$M_1 = \frac{B_1}{\mu_0} - H_1 = \frac{I}{2\pi R_1}(\mu_r - 1)$$

根据 $\alpha' = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$, 有

$$\alpha'_1 = M_1 = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R_1}$$

同理, 当 $r = R_2$ 时, $M_2 = \frac{B_2}{\mu_0} - H_2$, 有

$$\alpha'_2 = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R_2}$$

5.25 一根很长的长直圆管形导体, 内外半径分别为 a 、 b 。导体内通有沿轴线方向的电流 I , 且电流 I 均匀地分布在管的横截面上。试证明导体中各点 ($a < r < b$) 的磁场强度的量值由式 $H = \frac{I}{2\pi(b^2 - a^2)} \frac{r^2 - a^2}{r}$ 给出。

分析: 无限长导线横截面上电流 I 均匀分布, 因而可先计算出导体中电流密度。然后在导体横截面内, 以截面的中心为圆心, 取任意半径 r 作圆, 并以此为积分环路, 在每个环路上, 磁场强度的大小不相等, 方向沿圆周的切线方向。应用介质中的安培环路定理可求出磁场强度的量值。

证明: 在导体中, 其电流密度为 $j = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$, 因此在 $a < r < b$ 区域, 应用介质中的安培环路定理有

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \cdot \pi(r^2 - a^2)$$

即有

$$H = \frac{I}{2\pi(b^2 - a^2)} \frac{r^2 - a^2}{r}$$

证毕。

5.26 如图 5.25 所示, 一铜片厚为 0.15 mm , 电荷数密度为 $1.0 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$, 将其放入 $B = 0.1 \times 10^{24} \text{ T}$ 的均匀磁场中, 当铜片中通以 10 mA 的电流时, 求铜片两侧的霍尔电压, 若使用同样尺寸的半导体霍尔片, 其电荷数密度为 $1.0 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$, 求其相应的霍尔电压。

分析: 导体板放在磁场中通入电流 I , 如果导体板平面垂直于磁场方向, 则在导体板上、下两侧将产生电势差, 利用其导出的电压可直接计算。

解: 由霍尔效应中霍尔电压与电流及磁感应强度的关系, 即

$$V_H = R_H \frac{IB}{d}$$

式中, d 为霍尔片的厚度, $R_H = \frac{1}{nq}$ 为霍尔系数, 代入数据, 可得霍尔电压为

$$V_H = \frac{1}{nq} \cdot \frac{IB}{d} = \frac{10 \times 10^{-3} \times 0.1 \times 10^{24}}{1.0 \times 10^{24} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.15 \times 10^{-3}} = 42 \text{ } \mu\text{V}$$

当电荷数密度 $n = 1.0 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ 时, 霍尔电压为

$$V_H = \frac{1}{nq} \cdot \frac{IB}{d} = \frac{10 \times 10^{-3} \times 0.1 \times 10^{24}}{1.0 \times 10^{20} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.15 \times 10^{-3}} = 0.417 \text{ V}$$

可见, 使用同样尺寸的半导体霍尔片, 在同样条件下, 有较高的霍尔电压。

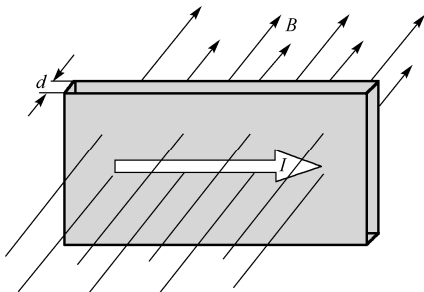


图 5.25 习题 5.26 图

第6章 麦克斯韦电磁场理论

前面介绍了静止电荷的静电场和恒定电流的磁场，其电场强度 E 和磁感应强度 B 在空间虽然可以逐点地变化，但它们在空间任一点上是不随时间变化的。这些场可以单独地处理，它们之间不存在相互的联系。本章进一步讨论随时间变化的电场与磁场，以及它们之间的相互联系、互相制约的关系。电磁感应定律的发现以及位移电流的概念提出，阐明了变化的磁场能够激发电场，变化的电场能够激发磁场，充分揭示了电场和磁场的内在联系及依存关系。在此基础上，麦克斯韦于 1865 年总结出描写电磁场的一组完整方程式，建立了完整的电磁场理论体系。电磁场理论成功地预言了电磁波的存在，揭示了光的电磁本质，其辉煌成就还极大地推动了现代电工技术和无线电技术的发展。

本章首先讨论电磁感应现象及其基本规律，包括动生电动势、感生电动势、自感和互感现象，然后讨论电磁场能量，最后介绍麦克斯韦电磁方程组所揭示的电磁场理论，并简单介绍电磁场的物质性。

6.1 学习要求

1. 电磁感应

- (1) 理解法拉第电磁感应定律、楞次定律的基本内容。
- (2) 掌握感应电动势、动生电动势和感生电动势的概念及本质。
- (3) 掌握并能应用法拉第电磁感应定律和楞次定律来计算感应电动势，并判断其方向。
- (4) 了解有旋场概念、自感系数和互感系数的概念及其物理意义。

2. 电磁场理论

- (1) 理解涡旋电场的概念以及涡旋电场与变化磁场的关系，并了解涡旋电流及其应用。
- (2) 理解位移电流的概念以及位移电流与变化电场的关系。
- (3) 理解电场和磁场具有能量和能量密度的概念，会计算简单的均匀磁场的能量。
- (4) 了解麦克斯韦电磁场方程组的积分形式及其物理意义。
- (5) 了解电磁波的特性及其传播过程和电磁波谱。

6.2 内容提要

1. 基本概念

- (1) 电磁感应现象：当穿过闭合回路的磁通量发生变化时，回路中就产生感应电动

势,在闭合回路中一般还有感应电流。即变化的磁场能激发电场,这一现象称为电磁感应现象。

(2) 自感现象:由于回路中电流变化,引起本身回路的磁通量变化,而在回路中激起感应电动势的现象,叫做自感现象。相应的电动势称为自感电动势。

(3) 互感现象:由于一个线圈回路中电流发生变化而在附近的另外一个线圈中产生感应电动势的现象,称为互感现象。相应的感应电动势称为互感电动势。

2. 法拉第电磁感应定律、楞次定律

(1) 楞次(H.F.G.Lenz)定律:当穿过闭合导线回路的磁通量发生变化时,回路中感应电流所产生的磁通量要抵偿引起感应电流的磁通量的改变。

(2) 法拉第(M.Faraday)电磁感应定律:由电磁感应实验知道,无论什么原因,只要回路中磁通量随时间而变化,回路中就有感应电动势,感应电动势等于回路中磁通量对时间的变化率的负值,其数学形式为

$$\varepsilon_i = -\frac{d\varphi_m}{dt} \quad (6-1)$$

式中, φ_m 为通过回路的磁通量,负号反映了感应电动势的方向,它是楞次定律的数学表现。

3. 动生电动势、感生电动势和涡旋电场

根据感应电动势产生的方式不同,它可以分为动生电动势和感生电动势两种形式。

(1) 动生电动势:导体在磁场中运动并切割磁力线时,导体中的自由电子受到洛伦兹力的作用,而使导体中产生感应电动势。这种电动势是由于导体在磁场中运动所引起的,故称为动生电动势。若长为 l 的导线在外磁场 \mathbf{B} 中以速度 \mathbf{v} 运动时,则它所具有的动生电动势为

$$\varepsilon_i = \int_{\text{导体}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (6-2)$$

积分是从 l 的一端到另一端。

对于闭合回路,可用下面两种方法求动生电动势:①将式(6-2)改为闭合回路积分,即 $\varepsilon_i = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$; ②应用式(6-1)法拉第电磁感应定律计算。

(2) 感生电动势:闭合回路或一段导线静止地处于磁场中,当磁感应强度 \mathbf{B} 随时间变化,即 $d\mathbf{B}/dt \neq 0$ 时,导体中产生的感应电动势称为感生电动势。它可以表达为

$$\varepsilon_i = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\varphi_m}{dt} \quad (6-3)$$

(3) 涡旋电场:变化的磁场在其周围空间激发的一种电场,叫做感生电场(又称为涡旋电场)。注意:感生电场是由变化的磁场所激发的,这与静电场是由静止电荷所激发是不同的,静电场是保守场,其环流为零,即

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

而感生电场的强度 \mathbf{E}_i 的环流一般不为零,将在后面电磁场理论中介绍。

4. 自感和互感

设有 N 匝线圈, 通过每一匝线圈面积上的磁通量为 φ_m , 则通过 N 匝线圈的磁通量 (又叫磁通链数, 简称磁链) 为

$$\Phi_N = N\varphi_m \quad (6-4)$$

(1) 自感: 设有一任意回路, 回路中由于电流变化引起通过回路本身磁链变化而出现的感应电动势为

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_N}{dt} = -\frac{d\Phi_N}{dI} \cdot \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

式中

$$L = \frac{d\Phi_N}{dI} \quad (6-5)$$

定义为回路的自感系数, 简称自感。它等于回路中电流变化为单位值时, 在回路本身所围面积内引起磁链的改变值。它体现了回路中产生的自感电动势反抗电流改变的能力。如果回路的几何形状不变, 而且周围空间没有铁磁物质, 那么由毕奥-萨伐尔定律可知, 空间任一点的磁感应强度 \mathbf{B} 与回路中的电流 I 成正比, 通过回路的磁链 Φ_N 也与电流 I 成正比。这时式 (6-5) 可写为

$$L = \frac{\Phi_N}{I} \quad (6-6)$$

即回路周围空间不存在铁磁性物质时, 回路自感的大小等于回路中电流为单位值时通过该回路所围面积的磁链的大小。

(2) 互感: 设有两个回路 C_1 和 C_2 , 当 C_1 中的电流 I_1 变化时, 在 C_2 回路中将产生互感电动势

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (6-7a)$$

M_{21} 称为回路 C_1 对 C_2 的互感系数。

同理, 当 C_2 中的电流 I_2 变化时, 在 C_1 回路中将产生互感电动势

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (6-7b)$$

M_{12} 称为回路 C_2 对 C_1 的互感系数。可以证明, 对任意形状的两个回路的互感系数 $M_{21} = M_{12}$ 总是成立的, 因此统一用 M 表示, 称为两个回路的互感系数。它反映了两个相邻回路各在另一个回路中产生互感电动势的能力。因此, 互感系数在一定程度上反映了两线圈的耦合程度。

5. 电场和磁场的能量

(1) 在电场中的电荷要受到电场力的作用, 电场中移动电荷时电场力要做功, 这说明

电场蕴藏着一定的能量(静电能)。电容器放电时,常伴随有热、光、声等现象的产生,也就是电容器储存的电场能量转换为其他形式能量的结果。电容器储存的能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QC \quad (6-8a)$$

式中, C 为电容器电容, Q 为电容器上的电荷量, U 为电容器极板间的电势差。

静电能就是静电场的能量,而且分布在电场所占的整个空间之中。就平行板电容器而言,单位体积所具有的能量(能量密度)为 $w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE$, 在一般情况下,电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (6-8b)$$

能量密度的单位为 $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ 。在各向同性的线性介质中, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, 电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (6-8c)$$

式(6-8c)对于非均匀电场和变化电磁场仍然正确,只是此时能量密度是逐点改变的。要计算整个带电系统的电场储存的能量,只需将电场所占空间分成许多体积元 dV , 然后把这些体积元中能量叠加起来,即

$$W = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (6-9)$$

积分区域遍及整个电场空间。

(2) 给一回路系统中通入电流时,由于各回路的自感和回路之间互感的作用,回路中的电流要经历一个从零到稳定值的变化过程,在这个过程中,电源必须提供能量用来克服自感电动势及互感电动势而做功,使电能转化为载流回路的能量和回路电流间的相互作用能,也就是磁场能量。

若一自感为 L 的回路,当其中通有电流 I_0 时,其周围空间磁场的能量为

$$W_m = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (6-10)$$

式(6-10)是用线圈的自感及其中的电流表示的,经过变换,磁能也可用描述磁场本身的量 B 、 H 表示。例如,一个螺线管内的磁感应强度为 $B = \mu n I$, 它的自感 $L = \mu n^2 V$, 式中, n 为螺线管单位长度的匝数, V 为螺线管内磁场空间的体积。把 L 、 I_0 代入式(6-10)得到磁能的 B 、 H 表达式

$$W_m = \frac{1}{2} LI_0^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = \frac{1}{2} B H V \quad (6-11)$$

因而磁场能量密度为

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} B H \quad (6-12)$$

一般情况下磁场能量密度的表达式为

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (6-13)$$

此式表示：在任何磁场中，某点的磁场能量密度只与该点的磁感应强度 \mathbf{B} 及介质的性质有关。对整个磁场不为零的空间积分，可得到磁场的总能量

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \quad (6-14)$$

6. 位移电流、全电流环路定律

在电容器的充放电过程中，导线中的电流 I 在电容器极板处被截断了，传导电流不再连续，为了解决电流的不连续问题，并在非稳恒电流产生的磁场中使安培环路定理也能成立，麦克斯韦提出了位移电流的概念。

通过对电容器充放电过程的分析发现：虽然传导电流在电容器两个极板之间中断了，但是与此同时，两个极板之间却出现了变化的电场。麦克斯韦指出：除传导电流和运流电流（运流电流又称作对流电流或徙动电流。是指电荷在不导电的空间，如真空或极稀薄气体中的有规则运动所形成的电流）能激发磁场外，变化的电场也能激发磁场。在一闭合回路中，若电场的电位移随时间的变化率 $\frac{dD}{dt} \neq 0$ ，那么在此闭合回路上，应有

$$\mathbf{j}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad I_d = \frac{d\Phi_e}{dt} = \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (6-15)$$

因此，麦克斯韦把电位移通量对时间的变化率看作是一种电流，从而引入位移电流的概念，令 I_d 和 \mathbf{j}_d 分别称为位移电流强度和位移电流密度。式（6-15）表明：电场中某一点的位移电流密度等于该点电位移的时间变化率，通过电场中某一截面的位移电流等于通过该截面的电位移通量的时间变化率。

引进位移电流概念后，对电容器在充放电过程中，虽然传导电流 I 虽不连续，但传导电流 I 和位移电流 I_d 相加的合电流 $I_1 = I + I_d$ （称为全电流）就连续了。在引入位移电流后，全电流成为连续的。这样，麦克斯韦还把非恒定情况下的安培环路定理修改为：在磁场中 \mathbf{H} 沿任一闭合回路的线积分，在数值上等于穿过以该闭合回路为边线的任一曲面的全电流，即

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum (I + I_d) = \int_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_s \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (6-16)$$

该式也称为全电流定律，应用非常普遍。将此关系用到电容器两极板之间，得到

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_d = \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

式中， $\int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dq}{dt} = I$ 这个结果正是导线中的电流，这就解决了电容器两个极板之间电流中断的矛盾。

由此可见，麦克斯韦的有旋电场和位移电流的假设分别指出：变化磁场产生有旋电场，而变化电场则产生有旋磁场；电场和磁场是相互联系的整体，存在交变电场的空间就存

在交变磁场, 同样, 存在交变磁场的空间存在交变电场。这就是麦克斯韦电磁场的基本概念。

7. 麦克斯韦方程组的积分形式及物理意义

由于麦克斯韦提出有旋电场和位移电流, 使电场和磁场的基本方程由

$$\begin{aligned}\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \sum q \\ \oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I\end{aligned}\quad (6-17a)$$

改写为

$$\begin{aligned}\oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \sum q \\ \oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_s \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}\quad (6-17b)$$

这4个方程是电磁场的基本方程, 由它们出发可以导出静电场、有旋电场、恒定电流的磁场、交变电流的磁场等关系, 从而给出能系统完整地描述电磁场普遍规律的方程组, 这组方程也称为麦克斯韦方程组的积分形式。由这组方程能解释电磁场的一些具体现象。

式(6-17b)中第一式表明, 在任何电场中, 通过任何封闭曲面的电位移通量等于该封闭面内自由电荷的代数和。

式(6-17b)中第二式说明, 在任何磁场中, 通过任何封闭曲面的磁通量总是等于零, 这也是磁场的高斯定理。

式(6-17b)中第三式反映了变化磁场和电场的联系, 它不但揭示了变化磁场激发电场的规律, 而且在 $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ 时, 仍能将自由电荷的静电场包含在内, 因此在一般情况下该式中的 \mathbf{E} 可以认为是电荷的静电场与变化磁场激发电场的合场强。也就是说, 在任何磁场中, 电场强度沿任意闭合曲线的线积分等于通过该曲线所包围的磁通量的时间变化率的负值。

式(6-17b)中第四式揭示了传导电流的磁场和变化电场激发磁场的规律, 它表明在任何磁场中, 磁场强度沿任意闭合的线积分等于通过以该闭合曲线为边线的任意曲面的全电流。

*8. 电磁振荡和电磁波的产生

一切电场和磁场都来源于电荷及其运动。如果电荷相对于观察者做变速运动, 那么, 其周围的电场和磁场都将随时间而变化, 从而将引起变化的电磁场在空间的相互激发, 又

称为电磁辐射。为此,先来看一个振荡偶极子。振荡偶极子实际上是一个电矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ 随时间做周期性变化的电偶极子。最简单的振荡偶极子是电矩按余弦方式变化的偶极子,它的电矩大小 p 可表示为

$$p = p_0 \cos \omega t$$

式中, $p_0 = q_0 l_0$ 为振幅, q_0 为电荷最大值; ω 为角频率。这种振荡偶极子所激发的电场和磁场都是迅速变化的。

已知给一个线圈通上交变电流,在线圈内就会产生变化的磁场;而将一个电容器接在交变电路中,电容器中就会产生变化的电场。因此,将一个自感为 L 的线圈和一个电容为 C 的电容器串联在电路中就有可能产生变化的电磁场,这样的电路如图 6.1 所示,称为 LC 电路。LC 电路可以实现电磁振荡,能产生电磁振荡的电路称为振荡电路。

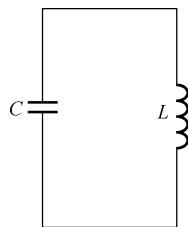


图 6.1 LC 电路

*9. 边界条件、超导体的电磁性质

(1) 任何电磁场都存在于一定的媒质中,媒质中 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 的关系及 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 的关系由本构关系给出。若媒质是线性且各向同性的,则有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (6-18)$$

式(6-18)称为媒质的本构关系。有了麦克斯韦方程组但还不能完全求解,从数学上说,要有边界条件,麦克斯韦方程组才有确定的解。边界条件由麦克斯韦方程组积分形式得出。

切向分量的边界条件 1

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S \quad \text{或} \quad H_{1t} - H_{2t} = J_S \quad (6-19)$$

切向分量的边界条件 2

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad \text{或} \quad E_{1t} = E_{2t} \quad (6-20)$$

法向分量的边界条件 1

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad \text{或} \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (6-21)$$

法向分量的边界条件 2

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \quad \text{或} \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \quad (6-22)$$

(2) 超导体的电磁性质

1911 年,昂纳斯发现,当温度降低到 4.2 K 附近时,汞样品的电阻突然降到零。不仅纯汞,当汞加入杂质后,甚至汞和锡的合金也具有这种性质,他把这种性质称为超导电性,具有超导电性的材料称为超导体。超导体的电磁性质有以下 4 点:

① 零电阻性,即对电流没有任何阻力,电流可以在超导体内长期流动,而不产生热效应,一般超导体在通过电流时两端没有电压。

②完全抗磁性(迈斯纳(W.Meissner)效应),即当一个磁体和一个处于超导态的超导体相互靠近时,磁体的磁场会使超导体表面中出现超导电流。此超导电流形成的磁场在超导体内部恰好和磁体的磁场大小相等,方向相反,这两个磁场相互抵消,使超导体内部的磁感应强度为零,即超导体排斥体内的磁场。或者说,磁力线完全不能穿透它,磁力线可以悬浮于磁场上方,利用这一点可以制成无摩擦轴承。如果将一超导体样品放入磁场中,由于穿过样品的磁通量发生了变化,所以表面产生电流,该电流将在样品内部产生磁场,完全抵消掉内部的外磁场,使超导体内部的磁场为零,根据公式 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ 和 $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, 由于超导体内 $\mathbf{B} = 0$, 因而 $\chi_m = -1$, 故超导体具有完全抗磁性。

③超导体存在临界磁场与临界电流。1913年,昂纳斯发现当超导体中的电流超过某一临界值时,导体就会转变为正常态。之后他又发现,超导体材料的超导态可以被外加磁场破坏而转入正常态,这种破坏超导态所需的最小磁场强度称为临界磁场。临界磁场的存在,限制了超导体中能够通过的最大电流,当通过超导体导线的电流超过一定数值 I_c 后,超导态便被破坏, I_c 称为超导体的临界电流。

④闭合超导体线圈在被感生出电流后,可将电能储存起来,可用作超导储能器。

6.3 重点难点分析

1. 本章重点

在研究了静电场和稳恒磁场的规律之后,进一步认识变化的磁场激发电场、变化的电场激发磁场的本质和规律等是本章的重点。具体内容包括法拉第电磁感应定律、楞次定律、动生电动势、感生电动势、自感和互感现象、位移电流、磁场的能量,以及麦克斯韦方程组(积分形式)的理解和应用。

2. 本章难点

本章的难点是对感生电场、动生电场、位移电流等基本概念的理解,对自感、互感现象的理解,以及对电磁感应定律中动生电动势、感生电动势产生的本质的认识。

动生电动势是由于导体回路在磁场中运动,导体中自由电子受洛伦兹力所致;而感生电动势是导体回路不动,而通过回路的磁通亦即磁场变化,此时导体中的自由电子由于磁场变化而受到一个力作用发生定向移动所致。需要注意,磁场变化对导体中自由电子的作用力既不是洛伦兹力(电荷无宏观运动),也不是库仑力(与磁场无关),而是变化磁场的一种特殊性质,它会对静止电荷、运动电荷产生一个作用力。

这就是变化的磁场激发的电场,称为感生电场,这在麦克斯韦方程组中的第一式和第三式
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q (\sum q = 0), \quad \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$
 反映出来。由此可见,感生电场线是闭合的,感生电场是有旋场,不是保守场。这是与静电场截然不同的。但静电场、感生电场都对电荷有力的。

位移电流是麦克斯韦将安培环路定理运用于含有电容的交变电路中出现矛盾时而引

入的概念。麦克斯韦认为可以把电位移通量对时间的变化率看作电流,称为位移电流。于是便建立了非常完美的全电流定律。

6.4 精选例题与习题解答

1. 精选例题

例 6-1 一圆形的平行板电容器,其半径为 8.0 cm,两极板间距为 0.1 cm,中间充满相对介电常数为 5.5 的电介质,若电容器充电到 100 V,两极板所带电荷量为多少?储存的电能为多少?

分析: 题目已知平行板电容器的相关参数,可以直接由平行板电容器电容公式计算其电容。然后根据电容、极板带电量和极板间电势差的关系求出电量,用储能公式求其储存的电。(注意:一个电容器的电容是由其本身结构和极板间电介质的种类决定的,与是否接入电路无关。)

解: 根据平行板电容器的电容公式,可得此电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = 9.78 \times 10^{-10} \text{ F}$$

所以此电容器所带电荷量为

$$Q = CU = 9.78 \times 10^{-8} \text{ C}$$

储存的电能为

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 \approx 4.9 \times 10^{-6} \text{ J}$$

例 6-2 一根横截面半径为 R 的圆柱形长直载流铜导线,其电流为 I ,在导线的横截面上电流是均匀分布的。求半径为 r ($r > R$),长度为 l ,与导线同轴的圆柱体内的磁场能量。

分析: 本题首先要根据安培环路定理求出载流直导线在空间的磁场分布,显然它不是匀强磁场。因此,在计算磁场能量时要分区域积分计算题目所规定空间区域的磁场能量。

解: 将长直导线看成是无限长圆柱体,在圆柱体的内、外均有磁场,根据安培环路定理 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$ 可知,圆柱体内的磁感应强度分布为

$$B_1 = \frac{\mu I r}{2\pi R^2} \quad (r < R) \quad ①$$

由于铜的相对磁导率 $\mu_r \approx 1$,故上式中的 $\mu \approx \mu_0$ 。圆柱体外的磁感应强度分布为(空气的磁导率 $\mu \approx \mu_0$)

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R) \quad ②$$

取体积元是长为 l ,半径分别为 r 和 $r + dr$ 与长直导线共轴的圆柱壳,那么该体积元的体积为

$$dV = 2\pi r l dr \quad (3)$$

利用磁场能量公式, 所求圆柱体内的能量为

$$W_m = \int w_m dV = \int_0^R \frac{1}{2} \frac{B_1^2}{\mu} dV + \int_R^r \frac{1}{2} \frac{B_2^2}{\mu_0} dV$$

将式①~式③代入上式得

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^2} \int_0^R r^2 dr + \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_R^r \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{r}{R}$$

例 6-3 反映电磁场基本性质的麦克斯韦方程组的积分形式有

$$\oiint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q \quad (1) \quad \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

$$\oiint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3) \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (4)$$

试判断下列结论包含于或等效于上述哪个方程式?

- (A) 电荷总伴随有电场 (1); (B) 静电场是保守场 (2);
 (C) 磁感应线总是闭合的 (3); (D) 变化的磁场一定伴随有电场 (2);
 (E) 感生电场是有旋的 (2); (F) 变化的电场总伴随有磁场 (4);
 (G) 电场线的头尾在电荷上 (1).

分析: 题目是关于麦克斯韦方程组中各方程物理意义的理解。

例 6-4 如图 6.2 所示, 长直导线中通有电流 $I = 5.0 \text{ A}$, 在与其相距 $d = 0.5 \text{ cm}$ 处放有一矩形线圈, 共 1000 匝, 设线圈长 $l = 4.0 \text{ cm}$, 宽 $a = 2.0 \text{ cm}$ 。不计线圈自感, 若线圈以速度 $v = 3.0 \text{ cm/s}$ 沿垂直于长导线的方向向右运动, 线圈中的感应电动势多大?

分析: 本题可以用两种方法求解。一种方法是利用法拉第电磁感应定律求解, 即首先由安培环路定理得到通有恒定电流的长直导线的磁场分布, 接着算出图中向右运动的矩形线圈在任意时刻的磁通, 然后代入法拉第电磁感应定律计算出结果; 另一种方法是得到载流长直导线的磁场分布后, 利用动生电动势的计算公式求解。

解法 1: 利用法拉第电磁感应定律解答。

首先由安培环路定理 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$ 求出载流导线的磁场分布, 得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

现以 O 点为坐标原点, 水平向右为 x 轴正方向。设某时刻矩形线圈的左边距载流直导线为 x , 则矩形线圈内的磁通量为

$$\Phi = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x}$$

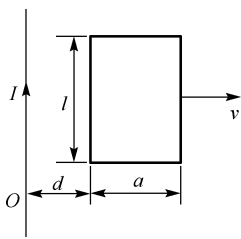


图 6.2 例 6-4 图

根据 $\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt}$, 有

$$\varepsilon_i = -\frac{N\mu_0 Il}{2\pi} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{dx}{dt}$$

所以, 当 $x=d$ 时, 有

$$\varepsilon_i = \frac{N\mu_0 Ilav}{2\pi(d+a)} = 1.92 \times 10^{-4} \text{ V}$$

解法 2: 利用动生电动势公式解答。

根据 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$ 求出载流导线的磁场分布, 得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

考虑线圈框架的两个平行长直导线部分产生动生电动势, 即

$$\text{近端部分: } \varepsilon_1 = NB_1 l v$$

$$\text{远端部分: } \varepsilon_2 = NB_2 l v$$

则

$$\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{N\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right) l v = \frac{N\mu_0 I a l v}{2\pi d(d+a)} = 1.92 \times 10^{-4} \text{ V}$$

例 6-5 如图 6.3 所示, 长直导线中通有电流强度为 I 的电流, 长为 l 的金属棒 ab 与长直导线共面且垂直于导线放置, 其 a 端距离导线为 d , 并以速度 \mathbf{v} 平行于长直导线做匀速运动, 求金属棒中的感应电动势 ε 并比较金属棒 ab 两端的电势 U_a 、 U_b 的大小。

分析: 本题可用两种方法求解; 解答中要注意金属棒两端电势高低的判断方法。

解法 1: 如图 6.3(a)所示, 利用动生电动势公式求解, 有

$$d\varepsilon = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -v \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr$$

所以

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 v I}{2\pi} \int_d^{d+l} \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 v I}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d}$$

由右手定则判定 $U_a > U_b$ 。

解法 2: 如图 6.3(b)所示, 利用法拉第电磁感应定律求解。作辅助线, 形成闭合回路 $abb'a'$ 。

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} y dr = \frac{\mu_0 I y}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d}$$

所以

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d} \cdot \frac{dy}{dt} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d}$$

由右手定则判定 $U_a > U_b$ 。

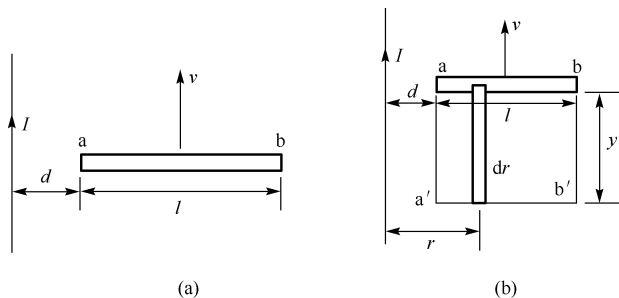


图 6.3 例 6-5 图

例 6-6 直导线中通以交流电, 如图 6.4 所示, 置于磁导率为 μ 的介质中, 已知 $I = I_0 \sin \omega t$, 其中 I_0 、 ω 是大于零的常量, 求与其共面的 N 匝矩形回路中的感应电动势。

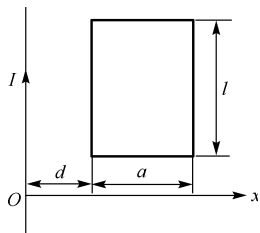


图 6.4 例 6-6 图

分析: 因图中载流直导线中的电流随时间变化, 那么它在周围空间产生变化的磁场。线圈不动, 穿过它的磁场变化, 故题中所求感应电动势就是感生电动势, 直接由法拉第电磁感应定律计算方便。

解: 首先用 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$ 求出直导线周围空间的磁场分布,

得 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, 建立坐标如图所示, 则矩形线圈内的磁通量为

$$\Phi = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot l dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \sin \omega t \ln \frac{d+a}{d}$$

所以

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N \mu_0 I_0 l}{2\pi} \omega \cos \omega t \ln \frac{d+a}{d}$$

例 6-7 圆柱形匀强磁场中同轴放置一金属圆柱体, 半径为 R , 高为 h , 电阻率为 ρ , 如图 6.5(a)所示。若匀强磁场以 $\frac{dB}{dt} = k$ ($k > 0$, k 为恒量) 的规律变化, 求圆柱体内涡电流的热功率。

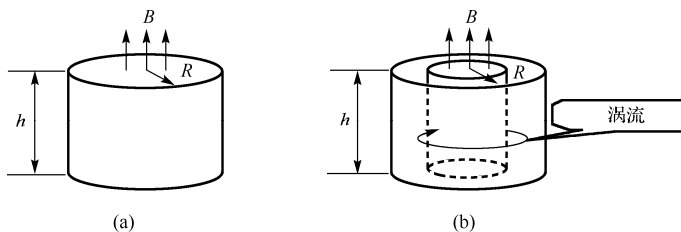


图 6.5 例 6-7 图

分析：涡电流在日常生活中是一种很普遍的现象。当大块金属导体放在交变磁场中，金属中的自由电子会受到变化磁场产生的感生电动势的作用，从而在其中形成涡旋状的感生电流，称为涡旋电流（简称涡流）。因为金属块的电阻很小，所以一般涡流的电流强度很大，结果会产生大量的焦耳热，这就是感应加热的原理。本题要注意体会和总结微积分处理物理问题的方法，首先要根据公式计算出感生电动势，再进一步得到涡旋电流及其热功率。

解：在圆柱体内任取一个半径为 r ，厚度为 dr ，高为 h 的小圆柱筒壁，由感生电动势计算式有

$$\varepsilon_i = \oint_l \mathbf{E}_{\text{涡}} \cdot d\mathbf{l} = \frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2$$

即

$$\varepsilon_{\text{涡}} = \frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2 = k \pi r^2$$

由电阻公式 $R = \rho \frac{l}{S}$ ，考虑涡流通过一个 dr 环带，如图 6.5(b) 所示，有电阻 $R = \rho \frac{2\pi r}{h dr}$ ，

而热功率

$$dP = i^2 R = \frac{k^2 \pi h}{2\rho} r^3 dr$$

所以

$$P = \frac{k^2 \pi h}{2\rho} \int_0^R r^3 dr = \frac{k^2 \pi h R^4}{8\rho}$$

例 6-8 一圆形线圈 A 由 50 匝细导线绕成，其面积为 4 cm^2 ，放在另一个匝数等于 100 匝、半径为 20 cm 的圆形线圈 B 的中心，两线圈同轴。设线圈 B 中的电流在线圈 A 所在处激发的磁场可看作匀强磁场。求：（1）两线圈的互感；（2）当线圈 B 中的电流以 $50 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$ 的变化率减小时，线圈 A 中的感生电动势的大小。

分析：要注意对互感系数大小的决定因素和物理意义的理解。解答本题的基本思路：首先假设线圈 B 通有电流，算出它在线圈 A 处激发的磁场，进一步算出磁通（磁链），根据互感系数的定义式得到互感系数；第二问对线圈 A 用法拉第电磁感应定律便可求解。

解：设 B 中通有电流 I ，则在 A 处产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 N_B I}{4\pi R_B^2} \cdot 2\pi R_B = \frac{\mu_0 N_B I}{2R_B}$$

（1）A 中的磁链为

$$\psi_A = N_A B S_A = \frac{\mu_0 N_A N_B I}{2R_B} \cdot S_A$$

则互感系数

$$M = \frac{\psi_A}{I_B} = \frac{\mu_0 N_A N_B S_A}{2R_B}$$

所以

$$M = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 50 \times 100 \times 4 \times 10^{-4}}{2 \times 0.2} = 20\pi \times 10^{-7} = 6.28 \times 10^{-6} \text{ H}$$

(2) 因为

$$\frac{d\psi_A}{dt} = \frac{\mu_0 N_A N_B S_A}{2R_B} \cdot \frac{dI}{dt} = 6.28 \times 10^{-6} \times 50 = 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$$

所以线圈 A 中的感生电动势的大小为

$$\varepsilon_A = 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$$

2. 习题解答

6.1 如图 6.6 所示, 圆形截面区域内存在着与截面相垂直的磁场, 磁感应强度随时间变化。

(a) 磁场区域外有一与圆形截面共面的矩形导体回路 $abcd$, 以 ε_{ab} 表示在导体 ab 段上产生的感生电动势, I 表示回路中的感应电流, 则 ()。

A. $\varepsilon_{ab} = 0, I = 0$ B. $\varepsilon_{ab} \neq 0, I \neq 0$

C. $\varepsilon_{ab} \neq 0, I = 0$ D. $\varepsilon_{ab} \neq 0, I \neq 0$

(b) 位于圆形区域直径上的导体棒 ab 通过导线与阻值为 R 的电阻连接形成回路, 以 ε_{ab} 表示在导体 ab 段上产生的感生电动势, I 表示回路中的感应电流, 则 ()。

A. $\varepsilon_{ab} = 0, I = 0$ B. $\varepsilon_{ab} = 0, I \neq 0$ C. $\varepsilon_{ab} \neq 0, I = 0$ D. $\varepsilon_{ab} \neq 0, I \neq 0$

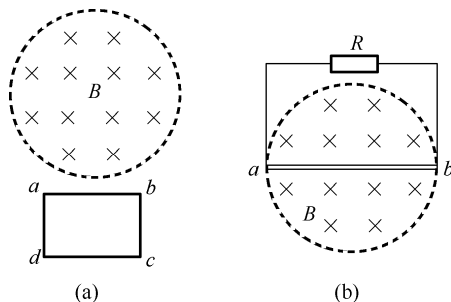


图 6.6 习题 6.1 图

分析与解: 本题是法拉第电磁感应定律的应用, 要注意感应电动势和感应电流产生的条件。对于图 6.6(a), 磁场区域外矩形回路 $abcd$ 中没有磁通的变化, 因而在这个回路的 ab 段上没有感生电动势, 也没有电流。故正确选项为 A; 对于图 6.6(b), 由于 ab 段与电阻 R 连接形成回路, 而在这个回路中磁通量随时间变化, 所以由法拉第电磁感应定律可知, 该回路的电动势 $\varepsilon_{ab} \neq 0$, 电流 $I \neq 0$, 故正确选项为 D。

6.2 空间有限的区域内存在随时间变化的磁场, 所产生的感生电场场强为 E_i , 在不包含磁场的空间区域中分别取闭合曲面 S , 闭合曲线 l , 则 ()。

A. $\oint_S E_i \cdot dS = 0$ $\oint_l E_i \cdot dl = 0$ B. $\oint_S E_i \cdot dS = 0$ $\oint_l E_i \cdot dl \neq 0$

$$\text{C. } \oint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} \neq 0 \quad \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{C. } \oint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} \neq 0 \quad \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} \neq 0$$

分析与解：变化的磁场在周围空间激发感生电场（即涡旋电场），它不是保守场，因而它穿过闭合曲面 S 的通量为零；而感生电动势不为零。故本题正确选项为 B。

6.3 在感应电场中，电磁感应定律可写成 $\oint_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\varphi}{dt}$ ，式中 \mathbf{E}_k 为感应电场的电场强度，此式表明（ ）。

- A. 在闭合曲线 l 上， \mathbf{E}_k 处处相等
- B. 感应电场是保守场
- C. 感应电场的电场线不是闭合曲线
- D. 在感应电场中，不能像对静电场那样引入电势的概念

分析与解：变化的磁场在其周围激发了一种电场，这种电场称为感应电场（又称感生电场）。闭合曲线 l 上， \mathbf{E}_k 不一定处处相等；感应电场是非保守场；感应电场的电场线既无起点也无终点，它是闭合曲线；由于感应电场是非保守场，因此它不能像对静电场那样引入电势的概念。故本题正确选项为 D。

6.4 用线圈的自感系数 L 来表示载流线圈磁场能量的公式为 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$ ，下列说法正确的是（ ）。

- A. 只适用于无限长密绕螺线管
- B. 只适用于单匝圆线圈
- C. 只适用于一个匝数很多，且密绕的螺绕环
- D. 适用于自感系数 L 一定的任意线圈

分析与解：由于在回路中形成电流的同时，在回路周围空间也建立了磁场，一个自感为 L 的线圈，当其中通有电流 I 时，其周围空间有 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$ 磁场能量。本题 D 为正确选项。

6.5 有两个线圈，线圈 1 对线圈 2 的互感系数为 M_{21} ，而线圈 2 对线圈 1 的互感系数为 M_{12} 。若它们分别流过 i_1 和 i_2 的变化电流，且 $\left|\frac{di_1}{dt}\right| < \left|\frac{di_2}{dt}\right|$ ，并设由 i_2 变化在线圈 1 中产生的互感电动势为 ε_{12} ，由 i_1 变化在线圈 2 中产生的互感电动势为 ε_{21} ，则论断正确的是（ ）。

- A. $M_{12} = M_{21}$, $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$
- B. $M_{12} \neq M_{21}$, $\varepsilon_{21} \neq \varepsilon_{12}$
- C. $M_{12} = M_{21}$, $\varepsilon_{21} > \varepsilon_{12}$
- D. $M_{12} = M_{21}$, $\varepsilon_{21} < \varepsilon_{12}$

分析与解：对于任意形状的两个回路，关系式 $M_{12} = M_{21}$ 总是成立；互感电动势 $\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$, $\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$ ，因为 $\left|\frac{di_1}{dt}\right| < \left|\frac{di_2}{dt}\right|$ ，故有 $\varepsilon_{21} > \varepsilon_{12}$ （注意等式后的负号），所以本题 C 答案为正确选项。

6.6 引起动生电动势的非静电力是_____力，引起感生电动势的非静电力是_____力，感生电场是由_____产生的。

分析与解: 导体在磁场中运动切割磁感线而产生的电动势叫动生电动势, 可用金属电子理论去解释。动生电动势的实质是运动电荷受到洛伦兹力的结果, 因此, 引起动生电动势的非静电力是**洛伦兹力**。回路不动, 由于磁场的变化而引起的电动势叫感生电动势, 产生感生电动势的非静电力不再是洛伦兹力, 而是**感生电场力**。感生电场是由**变化的磁场**产生的。

6.7 有一匝数为 $N = 200$ 匝的线圈, 今通过每匝线圈的磁通量 $\Phi = 5 \times 10^{-4} \sin 10\pi t$ (Wb), 则任一时刻线圈内的感应电动势为 _____; 在 $t = 10$ s 时, 线圈内的感应电动势为 _____。

分析与解: 通过每一匝线圈的磁通相同, 可算出 200 匝线圈的总磁通, 利用法拉第电磁感应定律可求出任意时刻的感应电动势的表达式 $\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\pi \cos 10\pi t$ (V); 再令 $t = 10$ s 可得该时刻的感应电动势为 $\varepsilon_i = -3.14$ V。

6.8 在一般情况下, 对于由自由电荷和变化磁场激发的电场, 如用 \mathbf{D} 表示总电位移, 根据以上的论述, 则得介质中电场强度的高斯定理为 _____; 经麦克斯韦修正后的安培环路定理为 _____。

分析与解: 介质中电场强度的高斯定理为 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q = \int_V \rho dV$, 经麦克斯韦修正后的安培环路定理为 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + I_d = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 。

6.9 在长直导线 L 中通有电流 I , 矩形线圈 ABCD 和 L 在纸面内, 且 AB 边与 L 平行, 如图 6.7 所示。当线圈在纸面内向右移动时, 线圈中感应电动势的方向为 _____; 当线圈绕 AD 边旋转, BC 边刚离开纸面正向外运动时, 线圈中感应电动势的方向为 _____。

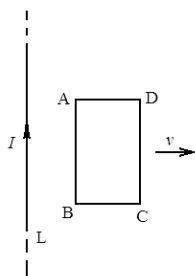


图 6.7 习题 6.9 图

分析与解: 由于长载流直导线在周围空间磁感应强度的分布为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, 在线圈位置 B 的方向垂直纸面向里。式中 r 为垂直导线向外的径向距离, 亦即 B 随 r 减小。因此, 当线圈在纸面内向右移动时, 通过矩形线圈 ABCD 的总磁通量减小。由法拉第电磁感应定律可知, 线圈中感生电流产生的磁通将阻止原磁通量的减小, 即线圈中感应电动势的方向由 $A \rightarrow B$ 的顺时针方向。同理, 当线圈绕 AD 边旋转, BC 边刚离开纸面正向外运动时, 原磁通量也减小, 因此, 在这种情况下感应电动势的方向也是由 $A \rightarrow B$ 的顺时针方向。

6.10 如图 6.8 所示, 为一充电后的平行板电容器, A 板带正电, B 板带负电。当合上开关 K 时, A、B 两板之间的电场方向为 _____, 位移电流的方向为 _____。

分析与解: 因为 A 板带正电, B 板带负电, A、B 两板之间的电场方向垂直于板且为 $A \rightarrow B$; 位移电流 $I_d = S \frac{d\mathbf{D}}{dt}$, 当合上开关 K 放电时, 电场减弱, $\frac{d\mathbf{D}}{dt}$ 的方向与电场方向相反, 但仍与导线中电流方向一致, 即此时位移电流方向为 $B \rightarrow A$ 。

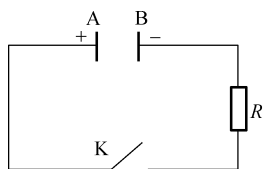


图 6.8 习题 6.10 图

6.11 一平行板空气电容器的两极板都是半径为 R 的圆形导体片, 在充电时, 板间电场强度的变化率为 $\frac{dE}{dt}$ 。若略去边缘效应, 则两板间的位移电流为_____。

分析与解: 麦克斯韦引入位移电流的概念, 即把电位移通量对时间的变化率看作是一种电流, 命名为位移电流, 所以题目中两板间的位移电流为 $\varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$ 。

6.12 在没有自由电荷和传导电流的变化电磁场中, $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

分析与解: 由全电流定律可知, 在没有自由电荷和传导电流的变化电磁场中

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d\varphi}{dt} = \iint_s \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$$

6.13 如图 6.9 所示, 金属圆环半径为 R , 位于磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 圆环平面与磁场方向垂直。当圆环以恒定速度 v 在环所在平面内运动时, 问 (1) 环中的感应电动势? (2) 环上位于与运动方向垂直的直径两端 a 、 b 间的电势差?

分析与解: 由法拉第电磁感应定律, 金属圆环在均匀磁场中运动时, 穿过它的磁通量不随时间变化, 故环中感应电动势 $\varepsilon_i = 0$; 环上位于与运动方向垂直的直径两端 a 、 b 间的电势差 $\varepsilon_{ab} = Bv \cdot 2R = 2BvR$ 。

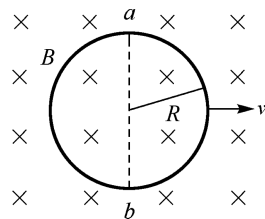


图 6.9 题 6.13 图

6.14 如图 6.10 所示, 两条平行长直导线和一个矩形导线框共面, 且导线框的一个边与长直导线平行, 它到两长直导线的距离分别为 r_1 、 r_2 。已知两导线中电流都为 $I = I_0 \sin \omega t$, 其中 I_0 和 ω 为常数, t 为时间,

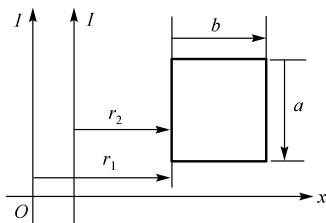


图 6.10 习题 6.14 图

导线框长为 a , 宽为 b 。求导线框中的感应电动势的大小随时间变化的表达式。

分析: 先由安培环路定理求出两载流直导线在空间的磁场分布, 然后求出穿过右边矩形线圈的磁通表达式, 由法拉第电磁感应定律即可求解。

解: 建立如题图所示坐标。则两个载同向电流的长直导线在空间任一点产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x - r_1 + r_2} \right)$$

穿过矩形线圈的磁通量为

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left(\int_{r_1}^{r_1+b} \frac{dx}{x} + \int_{r_1}^{r_1+b} \frac{dx}{x - r_1 + r_2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(\frac{r_1+b}{r_1} \cdot \frac{r_2+b}{r_2} \right) \end{aligned}$$

由法拉第电磁感应定律, 所以

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{r_1 + b}{r_1} \cdot \frac{r_2 + b}{r_2} \right) \frac{dI}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 I_0 \omega a}{2\pi} \ln \left(\frac{r_1 + b}{r_1} \cdot \frac{r_2 + b}{r_2} \right) \cos \omega t\end{aligned}$$

6.15 如图 6.11 所示, 两根相互平行、相距 a 的无限长直导线载有大小相等、方向相反的电流。长度为 b 的金属杆 CD 与两导线共面且垂直。今杆以速度 \mathbf{v} 沿平行于直电流的方向运动。求金属杆 CD 中的感应电动势, C、D 两端哪端电势高?

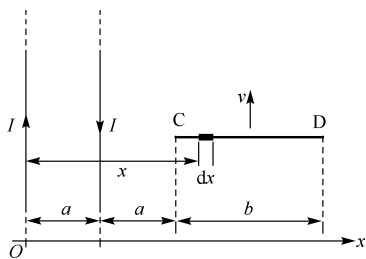


图 6.11 习题 6.15 图

分析: 金属棒 CD 在两无限长载流直导线所产生的磁场中运动, 因切割磁感线而产生感应电动势。首先求出两载流导线在其周围的磁场分布, 由于空间磁场是非均匀分布, 所以在用动生电动势的计算公式求解时, 要应用微积分知识。

解: 建立如图所示的坐标系, 设两直导线 CD 所在一侧磁感应强度的方向垂直纸面向外为正, 则两无限长直电流在空间任意点产生的磁感应强度大小分别为

$$B_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)}$$

在线元 dx 处总磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

根据电动势定义得到导体 CD 中的动生电动势 ε 为

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{x} = \int_D^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{x}$$

式中 \mathbf{E}_k 为一种等效的非静电性电场。由于 \mathbf{v} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{x} 三者相互垂直, 所以积分为

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \int_C^D (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{2a}^{2a+b} \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{x-a}{x} \Big|_{2a}^{2a+b} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{2(a+b)}{2a+b}\end{aligned}$$

因为, $2(a+b) > 2a+b$, 动生电动势 $\varepsilon > 0$, 所以电动势由 C \rightarrow D, 亦即 D 端的电势较高。

6.16 载有电流 I 的长直导线附近, 放一导体半圆环 MeN 与长直导线共面, 且端点 MN 的连线与长直导线垂直。半圆环的半径为 b , 环心 O 与导线相距 a , 设半圆环以速度 \mathbf{v} 平行导线移动, 求半圆环内感应电动势的大小和方向以及 MN 两端的电压 $U_M - U_N$ 。

分析: 半圆环 MeN 在无限长直导线产生的非均匀磁场中做切割磁力线运动, 故产生动生电动势, 如图 6.12(a)所示。因为圆环弧长与运动方向垂直的有效长度为 $dl \cos \theta$, 所以半个导体圆环的运动相当于一 MN 长度的导电杆的切割磁力线运动, 因此可用题 6.15 的分析方法求 MN 导电杆的电动势。

解: 建立如图 6.12(b)所示的坐标系。长直导线产生的非均匀磁场的大小为 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$, 根据电动势定义得到 MN 导电杆的电动势为

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{x} = \int_M^N (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{x}$$

式中 \mathbf{E}_k 为一种等效的非静电性电场。因为 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 沿 x 轴负向, 故

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{-}^{+} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{x} = \int_M^N (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{x} \\ &= - \int_{a-b}^{a+b} vB \cdot dx = - \int_{a-b}^{a+b} v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot dx = - \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b} \end{aligned}$$

式中负号表示电动势由 N 端指向 M 端, M 端电势高。 $U_M - U_N = \left| - \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b} \right|$ 。

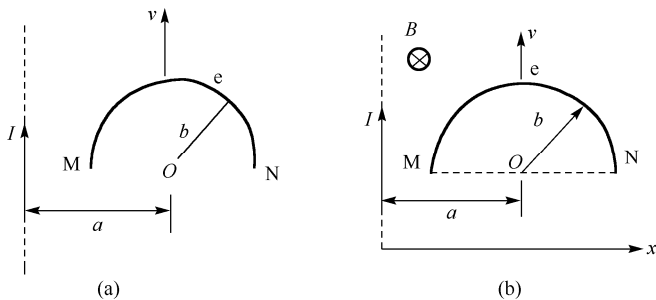


图 6.12 习题 6.16 图

6.17 磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场充满一半径为 R 的圆形空间, 一金属杆 ac 放在如图 6.13 所示位置, 杆长为 $2R$, 其中一半位于磁场内, 另一半位于磁场外。当 $\frac{dB}{dt} > 0$ 时, 求杆两端感应电动势的大小和方向。

分析: 题目中静止的金属杆 ac 处于变化的磁场中, 求杆两端的感生电动势。可以用两种方法求解, 一种方法是先求出圆形空间内外的感生电场分布, 然后按电动势的定义求解 (读者自己练习这种解法); 第二种方法是连接 Oa 、 Ob 和 Oc , 构成两个闭合回路 Oab 和 Obc , 对这两个回路应用法拉第电磁感应定律分析求解, 下面给出第二种解法。

解: 如题图所示, 因为 $\mathcal{E}_{ac} = \mathcal{E}_{ab} + \mathcal{E}_{bc}$, 而由法拉第电磁感应定律则有

$$\mathcal{E}_{ab} = - \frac{d\Phi_{\text{扇形}Oab}}{dt}$$

又 $\Phi_{\text{扇形}Oab} = B \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$, 所以

$$\mathcal{E}_{ab} = - \frac{d}{dt} \left[- \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 B \right] = \frac{\sqrt{3} R^2}{4} \frac{dB}{dt}$$

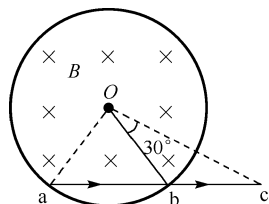


图 6.13 习题 6.17 图

由题图可知 30° 角对应的圆面积为 $\frac{\pi R^2}{12}$, 即 $\Phi_{\Delta Obc} = B \cdot \frac{\pi R^2}{12}$, 故

$$\varepsilon_{bc} = -\frac{d\Phi_{\Delta Obc}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[-\frac{\pi R^2}{12} B \right] = \frac{\pi R^2}{12} \frac{dB}{dt}$$

所以, 杆两端感应电动势的大小

$$\varepsilon_{ac} = \left[\frac{\sqrt{3}R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{12} \right] \frac{dB}{dt}$$

因为 $\frac{dB}{dt} > 0$, 所以 $\varepsilon_{ac} > 0$, 即感应电动势的方向从 $a \rightarrow c$ 。

6.18 在真空中, 一均匀电场中的电场能量密度与一磁感应强度为 0.5T 的均匀磁场中的磁场能量密度相等, 求该电场的电场强度大小。

分析: 电场和磁场都具有能量, 在本题中可直接应用电场能量密度和磁场能量密度公式求解。

解: 根据电场和磁场能量密度公式

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2, \quad w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

按题意, 当 $w_e = w_m$ 时, 有

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

所以电场强度大小为

$$E = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 1.5 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

6.19 试证明平行板电容器中的位移电流可写为 $I_d = C \left(\frac{dU}{dt} \right)$, 式中 C 是电容器的电容, U 是两极板间的电势差。如果不是平行板电容器, 上式可以应用吗? 如果是圆柱形电容器, 其中的位移电流密度和平行板电容器有何不同?

分析: 电容器极板上的电荷 Q 发生变化时, 极板间的电势差 U 、电位移矢量值 D 、电位移通量 ψ_d 均随之变化。

证明: 设平行板电容器上极板的电荷 Q 随时间变化, 在不考虑边缘效应的情况下, 将圆柱形闭合高斯面用于上极板, 使高斯面的上底位于导体极板内, 下底位于两极板之间, 上、下底面的面积均与极板面积 S 相同。由介质中的高斯定理, 有

$$\psi_d = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot S = Q$$

根据电容的定义: $C = \frac{Q}{U}$, 代入上式可得

$$\psi_d = CU$$

当极板上的电荷 Q 随时间变化时, 位移电流为

$$I_d = \frac{d\psi_d}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

对于圆柱形电容器, 在圆柱面间, 作同轴的高为 l 的高斯面, 由介质中的高斯定理, 有

$$\psi_d = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 2\pi r l = \lambda l$$

根据电容的定义: $C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda l}{U}$, 有

$$\psi_d = \lambda l = CU$$

当圆柱面上单位长度的带电量 λ 随时间发生变化时, 位移电流同样可以表示为

$$I_d = \frac{d\psi_d}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

由以上的证明过程可知, 电容器的位移电流 $I_d = \frac{d\psi_d}{dt} = C \frac{dU}{dt}$ 不但对平行板电容器适用, 对其他电容器也是适用的。

平行板电容器内电位移矢量的大小为

$$D = \frac{Q}{S} = \sigma$$

σ 为极板上自由电荷的面密度, 位移电流密度的大小为

$$\delta_d = \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}$$

圆柱形电容器内电位移矢量的大小为

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

λ 为单位长度的自由电荷量, 位移电流密度的大小为

$$\delta_d = \frac{dD}{dt} = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\lambda}{dt}$$

由以上讨论可知, 平行板电容器内的位移电流密度垂直于极板均匀分布, 即大小和方向都相同。圆柱形电容器内的位移电流密度垂直于轴线对称分布, 与垂直半径 r 成反比。

6.20 一螺绕环共 N 匝线圈, 截面为长方形, 其尺寸如图 6.14 所示。试用能量法证明此螺绕环自感系数 $L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ 。

分析: 假设螺绕环里通有电流 I , 且磁场只分布在螺绕环内, 由于在螺绕环内有磁场, 那么在内部就有一定的磁场能量。又由磁场能量与自感系数的关系就可求出该螺绕环的自感系数。

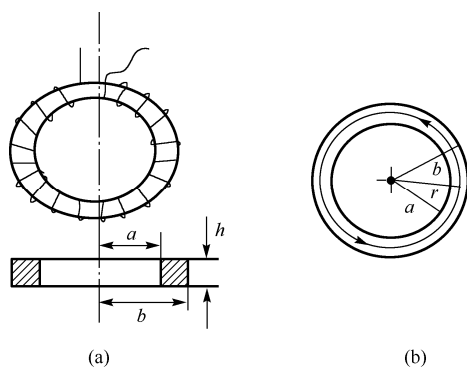


图 6.14 习题 6.20 图

证明：设线圈里通有电流 I ，现在环内作一半径为 r 的环路 l ，绕行方向如图 6.14(b) 所示。环路上各点的磁感应强度大小相等，方向由右手螺旋法则确定。磁感应强度 \mathbf{B} 沿此环路的环流为

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_l dl = B 2\pi r$$

环路内包围电流为 NI ，根据安培环路定理有 $B 2\pi r = \mu_0 NI$ ，于是得

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (a < r < b)$$

在环的外部，由于电流的代数和 $I = 0$ ，所以 $B = 0$ 。若 N 很大，线圈绕得很密，且 $R \gg b - a$ (R 表示螺绕环的平均半径)，则磁场几乎全部集中于管内，并可视管内磁感应强度是均匀的，而管外磁场为零。

对于一个自感为 L 的螺绕环线圈，当通有电流 I 时，其周围空间磁场的能量为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \int_V \frac{B^2}{\mu_0} dV$$

将 B 代入，并考虑 $dV = 2\pi r h dr$ ，即有

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_V \frac{B^2}{\mu_0} dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b \left(\frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \right)^2 \cdot 2\pi r h dr \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

因为 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ ，所以此螺绕环自感系数为

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

证毕。

第7章 振动 波动

自然界中广泛存在着一种往复的运动形式，从空间上说，物体在某一平衡位置附近往复地运动；从时间上说，运动呈现一定的周期性，这种运动被称为振动。振动是物质运动的一种基本形式，振动现象在自然界中是广泛存在的。物体在一定位置附近做的来回往复运动称为机械振动。例如，摆的运动，一切发声体的运动，机器开动时各部分的微小颤动等都是机械振动。机械振动有利有弊，人们可利用其有利的一面，如选矿、混凝土捣碎机等就是利用振动原理设计而成的；但其有害的一面也可能造成损失。在电路中，电流、电压、电荷量、电场强度和磁场强度在某一定值附近随时间做周期性变化，也称为振动，即电磁振荡。电磁振荡与机械振动在本质上是不同的，但是在运动形式上具有振动的共性，它们遵从的规律也可以用统一的数学形式来描述，有相似的规律。所以从广义的角度说，任何一个描述物体运动状态的物理量在某一定值附近反复变化都可称为振动。

按振动系统的受力或者能量转换情况，振动可分为自由振动和受迫振动；自由振动又可分为无阻尼振动和阻尼振动；振动也可分为线性振动和非线性振动。振动的形式和分类多种多样，在不同的振动现象中，最简单、最基本的振动是简谐振动，简称谐振动。它是某些实际振动的近似，也是一种理想化的模型，任何复杂的运动都可视为若干谐振动的叠加。研究简谐振动是进一步研究复杂振动的基础。因此，本章振动部分要求掌握描述简谐振动的物理量，以及简谐振动的特征和定义。

振动系统通常都不是孤立存在的，它们都和周围的其他介质相联系，振动的传播过程称为波动。通常波动分为两大类：一类是机械振动在媒质中的传播，称为机械波；一类是变化的电场和变化的磁场在空间的传播，称为电磁波。虽然各类波的本质不同，各有其特殊的性质和规律，但在形式上具有许多相同的特征和规律，如它们都有波源，机械波的波源是机械振动，而电磁波的波源是电磁振荡；都具有一定的传播速度；都伴随着能量的传播；都能产生反射、折射、干涉和衍射等现象；同样可以用类似的数学方法来描述等。本章主要介绍机械波的基本规律，其中许多对电磁波也适用，包括机械波特别是最基本的平面简谐波的形成、类型、波函数及其特征；波动的传播速度以及波动传送能量的规律；波动的传播规律——惠更斯原理；波的叠加原理以及一种叠加现象——驻波；波的反射、折射和干涉、波的多普勒效应等。

7.1 学习要求

1. 简谐振动

(1) 了解简谐振动的定义及特点，了解回复力的概念。

- (2) 了解简谐振动的动力学特征,并能判断物体的运动是否是简谐振动。
- (3) 掌握简谐振动的运动学特征和运动学方程表达式,并且熟练掌握相关的计算。
- (4) 掌握简谐振动的振动图像,并会借助于振动图像解决相关的简谐振动的运动问题。
- (5) 理解描述简谐振动的3个特征量(振幅、周期和频率、相位和初相)的物理意义。
- (6) 重点掌握研究简谐振动的旋转矢量表示法。
- (7) 掌握简谐振动的能量变化特征。
- (8) 了解电磁振荡的运动学特征及规律,了解电磁振荡中电荷、电流、电压、电场、磁场和能量的转换情况,了解阻尼电磁振荡和受迫电磁振荡。

2. 一维简谐振动的合成

- (1) 掌握两个同方向同频率简谐振动的合成规律,掌握运用解析法与旋转矢量图法求解两个同方向同频率简谐振动的合成问题。
- (2) 了解两个相互垂直、同频率的简谐振动的合成规律;了解两个相互垂直、频率具有简单整数比值的简谐振动的合成及李萨如图形。
- (3) 理解同方向不同频率简谐振动的合成问题,理解“拍”现象的形成原因,掌握拍频的物理特征。
- (4) 了解阻尼振动、受迫振动与共振的力学与运动学特征及规律。

3. 波动

- (1) 理解机械波产生的条件;掌握建立平面简谐波的波动表达式的一般方法及波动表达式的物理意义;理解波形图线。
- (2) 理解平面简谐波的能量传播特征及能流、能流密度的概念。
- (3) 理解相位传播的概念和相位差在波的叠加中的作用,重点掌握平面简谐波的波动方程,波的产生、描述、能量,以及干涉、驻波等问题。
- (4) 理解惠更斯原理和波的叠加原理,理解机械波的干涉,掌握波的相干条件,并能熟练地应用相位差或波程差的概念来分析和确定相干波叠加后振幅的极大与极小问题。
- (5) 了解声波的特性,理解描述声波的各物理量;了解机械波、电磁波(光波)与物质波的联系与不同。
- (6) 掌握驻波的形成条件及其特点;了解驻波和行波的区别;了解半波损失的概念。
- (7) 理解机械波的多普勒效应及其产生原因。能简单计算波源或观察者相对介质运动时,运动方向沿两者连线情况下的多普勒频移。

7.2 内容提要

(一) 振动

1. 基本概念

(1) 简谐振动

物体运动时, 如果离开平衡位置的位移 x (或角位移 θ) 按余弦函数 (或正弦函数) 的规律随时间 t 变化, 这种运动称为简谐振动。

(2) 描述简谐振动的 3 个特征量 (振幅、角频率、相位)

振幅 A : 在简谐振动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 中, 因 $\cos(\omega t + \varphi_0)$ 的值在 $+1$ 和 -1 之间, 所以物体的位移亦在 $+A$ 和 $-A$ 之间, 把做简谐振动的物体偏离平衡位置最大位移的绝对值 A 称为振幅。设物体沿 x 轴方向做简谐振动, 则振幅记为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (7-1a)$$

式中, x_0 、 v_0 为 $t=0$ 时物体的位置和速度。也可由任意时刻的位置 x 和速度 v 确定, 即

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}} \quad (7-1b)$$

周期 T 和频率 ν : 物体完成一次完整振动所经历的时间称为周期, 用 T 表示, 单位为 s ; 单位时间内物体所做的完全振动的次数称为频率, 用 ν 表示, 它的单位是赫兹, 符号是 Hz 。周期与频率成倒数关系, 数学表示为

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (7-2)$$

角频率 ω : 等于物体在单位时间内相位的变化, 或物体完全振动次数的 2π 倍, 即

$$\omega = 2\pi\nu \quad (7-3)$$

ω 称为角频率 (又称圆频率), 单位是 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (弧度每秒)。

相位: 当物体做简谐振动的振幅 A 和角频率 ω 一定时, 振动物体在任意时刻的位置、速度、加速度都由 $(\omega t + \varphi_0)$ 决定, 也就是说, $(\omega t + \varphi_0)$ 能反映振动物体在任一时刻的运动状态。因而, 定义 $(\omega t + \varphi_0)$ 为简谐振动的相位 (也称位相或周相)。对某一给定的系统来说, 只要知道某时刻的相位, 就可以立即求出其位置和速度, 即知道此时系统的运动状态。可见, 相位是决定任意时刻谐振动物体运动状态的物理量。

初相位: 当 $t=0$ 时, $(\omega t + \varphi_0) = \varphi_0$, 故 φ_0 称为初相位, 简称为初相。它是决定振动物体初始时刻运动状态的物理量。

相位差: 两相同频率简谐振动的相位之差称为相位差, 用 $\Delta\varphi$ 表示, 即

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{20}) - (\omega t + \varphi_{10}) = \varphi_{20} - \varphi_{10} \quad (7-4)$$

可见两同频率的简谐振动在任意时刻的相位差, 都等于其初相差。

2. 简谐振动方程及基本特征

(1) 动力学特征

简谐振动系统受力必有以下形式:

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (7-5a)$$

或小角度的单摆 (当 θ 很小, 满足 $\sin\theta \approx \theta$ 时) 有

$$F = -mg \sin \theta \approx -mg\theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (7-5b)$$

这种力称为弹性力或回复力。以上两式表明：力的大小与物体的位置（或角位置）成正比，负号表明力的方向始终指向平衡位置。

因此，简谐振动的运动微分方程（或简谐振动的动力学方程）有如下形式：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (7-6a)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (7-6b)$$

式中， $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ， $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ 是由系统本身性质所决定的常量，所以简谐振动的动力学特征是振动系统所受的满足式(7-5a)的弹性力或满足式(7-5b)的回复力。式(7-6a)、式(7-6b)是简谐振动的普遍定义式，在机械运动、无线电、光学等领域普遍适用，且 ω^2 取决于系统本身的性质。

(2) 运动学特征

根据运动学方程的定义，可以确定简谐振动系统的运动方程 $x = x(t)$ 或 $\theta = \theta(t)$ ，求解式(7-6a)、式(7-6b)，分别有

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7-7a)$$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi'_0) \quad (7-7b)$$

式中， A_x 、 θ_m 和 φ_0 、 φ'_0 为待定常数，就是前面提到的振幅和初相。它们由振动系统的初始条件决定。

(3) 运动学方程的4种表达方式

以弹簧振子为例：由运动微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ ，求解得，运动学方程为

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ x = A \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega t + \varphi'_0) \\ x = A e^{i(\omega t + \varphi_0)} \\ x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \quad \text{或} \quad x = A \cos(2\pi \nu t + \varphi_0) \end{cases} \quad (7-8)$$

(4) 简谐振动物体的速度、加速度

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (7-9)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \quad (7-10)$$

速度的幅值为 $v_m = \omega A$ ，加速度幅值为 $a_m = \omega^2 A$ 。

由位移 x 的初始值 $x_0 = A \cos \varphi_0$ ，速度 v 的初始值 $v_0 = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \varphi_0$ （请思考并推导）确定两个积分常数，求解得到

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \varphi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \quad (7-11)$$

3. 简谐振动的旋转矢量表示法

简谐振动三个特征量的物理意义可用旋转矢量方法表示。如图 7.1 所示，设有一长度为 A 的矢量 \overline{OM} 在平面内绕 O 点以匀角速率 ω 逆时针旋转，并设初始时刻（ $t=0$ ）该矢量的位置与 Ox 轴之间的夹角为 φ_0 ，则任意时刻 t ，矢量 \overline{OM} 与 Ox 之间的夹角为 $(\omega t + \varphi_0)$ ，与做简谐振动的物体在该时刻的相位相同，矢量 \overline{OM} 的端点 M 在 Ox 轴上的投影点 P 的位置为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7-12)$$

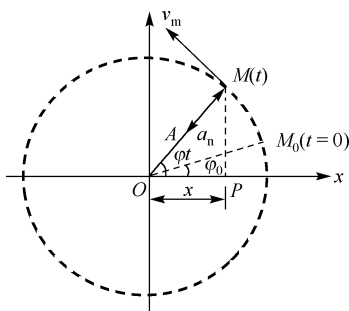


图 7.1 旋转矢量表示方法

显然， \overline{OM} 匀速转动时，其端点 M 在 Ox 轴上的投影点 P 的运动是简谐振动。 \overline{OM} 为旋转矢量，其长度就是简谐振动的振幅，转动的角速度就是简谐振动的圆频率。

旋转矢量表示法的优点是可以直观、形象地表示简谐振动的三个特征量，方便求解简谐振动方程。用旋转矢量还可以表示简谐振动的速度和加速度。做匀速圆周运动的质点的速率 $v_m = \omega A$ ，向心加速度 $a_n = \omega^2 A$ ，在 t 时刻它们在 x 轴上的投影分别为

$$v = -v_m \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (7-13)$$

$$a = -a_n \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (7-14)$$

思考题：简谐振动物体的位移 x 、速度 v 、加速度 a 三者的关系图是怎样的？

4. 简谐振动的能量（以弹簧振子为例）

简谐振动系统的动能、势能都随时间变化，动能达到最大值时，势能为零，势能达到最大值时，动能为零。但系统的总机械能守恒，即 $E = E_k + E_p = \text{常量}$ 。

$$\text{动能} \quad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad (7-15)$$

$$\text{弹性势能} \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \quad (7-16)$$

$$\text{机械能（总能）} \quad E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (7-17)$$

5. 简谐振动的合成

(1) 两个同方向、同频率的简谐振动的合成

函数运算法: 空间某一质点同时参与沿同一方向 (x 轴) 的两个独立的同频率的简谐振动位移方程为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

利用三角函数运算可得它们的合振动方程为

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

可见合成后的运动仍然是频率不变的简谐振动, 其中合振幅 A 和合振动的初相 φ 为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})} \quad (7-18)$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20}}{A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20}} \quad (7-19)$$

旋转矢量法: 如图 7.2 所示, A_1 与 A_2 代表初始时刻两个同方向同频率的谐振动,

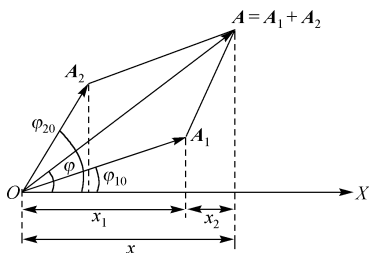


图 7.2 两个同方向同频率的谐振动的合成

$A = A_1 + A_2$, 因 A_1 与 A_2 频率相同, 故 A_1 与 A_2 以相同的角速度逆时针旋转时, 其合矢量 A 也将同步旋转, 且矢量的长度不变, 则合振动的表达式可由矢量 A 在 Ox 轴上的投影给出。

当两振动的相位差 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $A = A_1 + A_2$, 合振动最大, 如图 7.3(a) 所示。

当两振动的相位差 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $A = |A_1 - A_2|$, 合振动反相叠加, 合振幅最小, 如图 7.3(b) 所示。

对于一般情况, 合振幅介于 $A = A_1 + A_2$ 和 $A = |A_1 - A_2|$ 之间, 如图 7.3(c) 所示。

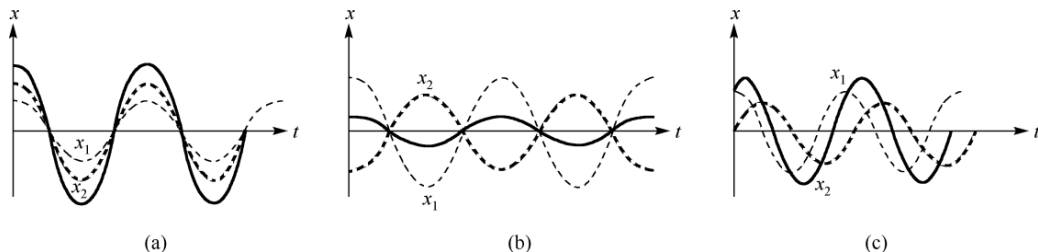


图 7.3 两简谐振动的相位差关系

图线表示法: 与物体做直线运动相似, 在简谐振动中也采用 $x-t$ 图、 $v-t$ 图及 $a-t$ 图等图线来直观的反映简谐振动的周期性和振动规律。图 7.3 所示的 $x-t$ 图称为振动曲线,

表征简谐振动特征三个物理量 A 、 ω 、 φ_0 都可以由振动曲线 $x-t$ 图得出, 所以 $x-t$ 图也可以完整而充分地描述简谐振动。

(2) 两个同方向、不同频率的简谐振动的合成

当 $\omega_1 \neq \omega_2$ 时, 合振动的振幅 A 和角速度 ω 均为时间的函数, 这种情形表现为非简谐振动。

当 $\omega_1 \approx \omega_2$ 时, 合振动振幅 A 不再是等幅振动, 而是随时间发生周期性变化, 时而加强, 时而减弱, 这个现象称为拍。其振幅变化的频率称为拍频, 表达式为

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \right| = |\nu_2 - \nu_1| \quad (7-20)$$

关于“拍”的特征分析, 设两个相近的角频率, 且 $\omega_1 < \omega_2$, 初相位相同的谐振动方程为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_0)$$

若考虑 $A_1 = A_2$, 则由合振动方程解得为

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi_0\right) \quad (7-21)$$

在式 (7-21) 中, 若 $\omega_2 - \omega_1$ 远小于 ω_1 或 ω_2 , 式中第一项因子 $2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$ 表示振幅随时间缓慢周期性地变化。第二项因子 $\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi_0\right)$ 可视为角频率为 $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$ 的简谐振动。因此, 合振动的特点是可近似看成角频率为 $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2$, 振幅为 $2A \cos\left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right|$ 的简谐振动, 此时振动出现时强时弱的拍现象, 如图 7.4 所示。

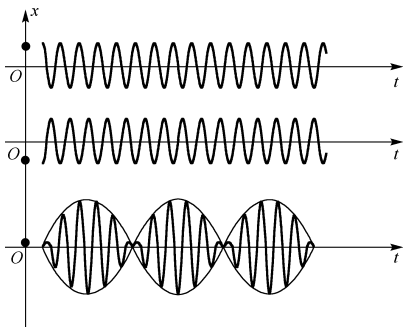


图 7.4 $\omega_1 \approx \omega_2$ 时, 振动出现时强时弱的拍现象

思考题: 两个相互垂直、同频率的简谐振动的合成规律和两个相互垂直、频率有简单整数倍关系的简谐振动的合成规律是怎样的?

6. 阻尼振动、受迫振动和共振

(1) 阻尼振动

振动物体受到阻力作用时, 振动系统的能量不断减小, 因而振幅也随时间而减小, 这种在回复力和阻力作用下的振动, 称为阻尼振动。

若振动物体的质量为 m , 在弹性力(或准弹性力)和阻力作用下运动, 则物体的运动学方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} \quad (7-22a)$$

或

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7-22b)$$

式中, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{\gamma}{m} = 2\delta$, ω_0 为无阻尼时振子的固有角频率, δ 为阻尼系数, 在弱阻尼($\delta < \omega_0$) 的情况下, 微分方程式(7-22b)的解为

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega' t + \varphi'_0) \quad (7-23)$$

式中, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, A_0 和 φ'_0 为积分常数。余弦项表征了在弹性力和阻力作用下的周期运动, $e^{-\delta t}$ 反映了阻尼对振幅的影响, 因此阻尼振动是准周期振动, 如图 7.5 所示。

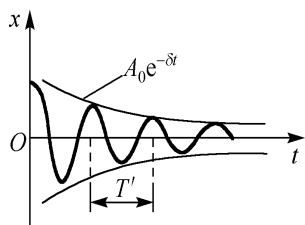


图 7.5 阻尼振动的准周期振动

(2) 受迫振动

受迫振动是指物体在周期性外力的持续作用下发生的振动。受迫振动稳定后, 外力做功提供的能量等于系统克服阻尼所消耗的能量, 因而受迫振动的振幅能保持不变, 也是等幅振动。受迫振动与简谐振动的区别在于, 简谐振动的角频率由系统本身的性质决定, 而受迫振动的角频率等于驱动力的角频率, 一般驱动力形式为

$$F = F_0 \cos \omega_d t$$

运动方程为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_d t \quad (7-24a)$$

式中, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{\gamma}{m} = 2\delta$ 。当阻尼较小时, 式(7-24a)的解为

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi'_0) + A \cos(\omega_d t + \varphi) \quad (7-24b)$$

其中, $A e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi'_0)$ 为衰减项, 一段时间后, 此项可忽略。第二项 $A \cos(\omega_d t + \varphi)$ 为稳态项, 是一个等幅振动。

受迫振动的振幅、稳态受迫振动的位移和驱动力的相位差分别为

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\omega_0^2 - \omega_d^2 + 4\delta^2\omega_d^2}} \quad (7-25)$$

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta\omega_d}{\omega_0^2 - \omega_d^2}$$

受迫振动能量特征：一方面周期性驱动力为振动系统提供能量，另一方面系统又因阻尼而消耗能量，若二者相等，则系统达到稳定振动状态。

(3) 共振

对于受迫振动，当外力幅值恒定，稳定态振幅随驱动力的频率而变化。当驱动力的角频率等于某个特定值时，受迫振动的振幅或速率达到最大值的现象称为共振。

通过求位移振幅对 ω_d 的导数，令 $\frac{dA}{d\omega_d} = 0$ ，得到共振时的角频率（共振频率 ω_r ）为

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (7-26)$$

可见，位移共振时，驱动力的频率略小于系统的固有角频率 ω_0 。阻尼越小， ω_r 越接近于固有频率 ω_0 ，共振位移幅值越大。

受迫振动的速度在一定条件下也可以发生共振，称为速度共振。将速度振幅对 ω_d 求导，令 $\frac{dv_m}{d\omega_d} = 0$ ，得

$$\omega_r = \omega_0 \quad (7-27)$$

式 (7-27) 表明：驱动力的频率等于系统固有频率时，速度幅值达到最大；在给定幅值的周期性外力的作用下，阻尼越小，速度幅值越大，如图 7.6 所示。

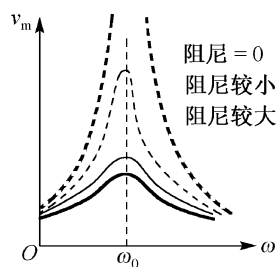


图 7.6 速度共振

7. LC 振荡器

物理学中的振动不仅有物体的机械振动，还有电磁振动，LC 振荡就是一个非力学的简谐振动。如图 7.7 所示是一个 LC 振荡电路，它是把一个电容为 C 的已充电电容器与一个自感系数为 L 的线圈连在一起构成的回路。

若不考虑电路中的焦耳损耗，即忽略电阻，则 LC 振荡方程为

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \quad (7-28)$$

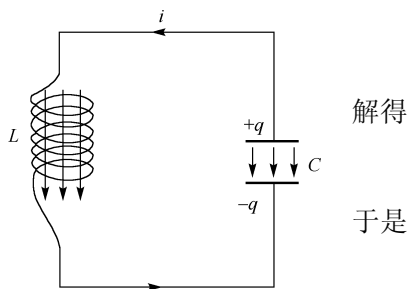


图 7.7 LC 振荡电路

解得

$$q = q_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (7-29)$$

于是

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 \sin(\omega t + \varphi) = -I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (7-30)$$

电荷 q 和电流 i 都随时间周期性变化, 即产生电磁振荡。 $\omega = \frac{1}{LC}$ 称为 LC 振荡电路的自由振荡角频率。

说明: 在电路中, 电流、电压、电荷量、电场强度和磁场强度等物理量都可能在某一定值附近随时间周期性地变化, 这类变化统称为振动, 即电磁振荡。电磁振荡与机械振动有相似的规律。

(二) 波动

1. 基本概念

(1) 波动、波源及机械波产生的条件

振动的传播过程称为波动, 波动通常分为两大类: 一类是变化的电场和变化的磁场在空间的传播, 称为电磁波; 一类是机械振动在媒质中的传播, 称为机械波。机械波的产生必须具备两个条件: 一是要有做机械振动的物体, 称为波源; 二是要有传播振动的弹性媒质。

(2) 横波、纵波

横波: 在波动中, 如果质点振动的方向和波的传播方向相互垂直, 这种波称为横波。横波是通过介质的切向形变所产生的切向弹性力来实现的, 只有固体才能产生切向形变。

纵波: 在波动中, 如果质点的振动方向和波的传播方向相互平行, 这种波称为纵波。纵波是通过介质的拉伸和压缩形变所形成的纵向弹性力来实现的。固体、液体、气体都能产生这种形变, 因而都能传播纵波。

(3) 描述波动的物理量

波速 u : 波动是振动状态 (即位相) 的传播, 振动状态在单位时间内传播的距离称为波速, 也称相速, 用 u 表示。对于机械波, 波速通常由媒质的性质决定。

横波在固体中传播速度为

$$u = \sqrt{\frac{N}{\rho}} \quad (7-31)$$

式中, N 是固体切变弹性模量, ρ 是介质质量密度。

液体和气体中的纵波速度为

$$u = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (7-32)$$

式中, B 是介质的体积弹性模量, ρ 是介质质量密度。对于大多数金属, $B \approx Y$ (杨氏弹性模量), 故

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (7-33)$$

在弹性细棒或金属 (弹性限度内) 中纵波波速也用式 (7-33) 计算。在拉紧的绳或细线中, 横波的波速为

$$u_t = \sqrt{\frac{T}{\eta}} \quad (7-34)$$

式中, T 为张力, η 为绳的质量线密度。

波动的周期 T 和频率 ν : 波动的周期是指一个完整波形通过媒质中某一固定点所需的时间, 用 T 表示。周期反映了波的时间周期性。周期的倒数称为频率, 波动的频率是指单位时间内通过媒质中某固定点完整波的数目, 用 ν 表示。由于波源每完成一次全振动, 就有一个完整的波形发送出去, 所以, 当波源相对于媒质静止时, 波动的周期即为波源振动的周期, 波动的频率即为波源振动的频率, 与介质无关。因此, 波动的周期和频率由波源决定。

波长 λ : 同一波线上相邻的相位差为 2π 的两质点之间的距离称为波长, 用 λ 表示。波长反映了波的空间周期性。波长、波速与波动的周期、频率的关系为

$$\lambda = uT = \frac{u}{\nu} \quad (7-35)$$

2. 平面简谐波

平面简谐波的波动方程为

$$y(x, t) = A \cos \left[\left(\omega t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] \quad (7-36a)$$

式中符号“ \mp ”由波的传播方向决定。正号表示波沿 x 轴负方向传播; 负号表示波沿 x 轴正方向传播。波的表达式还可表示为

$$y(x, t) = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] \quad (7-36b)$$

波动方程的物理意义:

- ① 当 x 一定时, 波动方程表示在波线的 x 处, 质点简谐振动的振动方程。
- ② 当 t 一定时, 波动方程表示 t 时刻在波线上各质点离开各自平衡位置的分布情况, 即 t 时刻的波形。
- ③ 当 x 、 t 都变化时, 波动方程表示沿 x 轴方向传播的波动情况, 即代表一列行波。

3. 波的能量

(1) 波的能量: 波动过程中, 介质内各点因振动而具有动能; 介质内各点的振动使介质发生形变, 因而介质内还具有形变势能。把波动过程中介质各部分所具有的动能和势能的总和称为波的能量。波媒质中任一体积元 dV 的能量为

$$\text{动能:} \quad dE_k = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (7-37a)$$

$$\text{势能:} \quad dE_p = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (7-37b)$$

$$\text{机械能:} \quad dE = dE_k + dE_p = \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (7-37c)$$

式中, ρ 是介质的密度。可见能量是时间 t 的函数, 且能量以速率 u 向前传播。

(2) 波的能量密度和平均能量密度

单位体积媒质所具有的能量称为波的能量密度, 用 w 表示, 为

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (7-38)$$

通常由于不需要具体知道不同时刻能量的瞬时值, 所以就取它在一个周期内的平均值。能量密度在一个周期内的平均值称为波的平均能量密度, 用 \bar{w} 表示, 为

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (7-39)$$

(3) 波的平均能流

一个周期内通过与波的传播方向垂直的某个面的能量称为能流, 用 P 表示。能流在一个周期内的平均值称为平均能流, 用 \bar{P} 表示, 为

$$\bar{P} = \bar{w} u \Delta S \quad (7-40)$$

(4) 波的平均能流密度 (波的强度)

单位时间内垂直通过单位面积的平均能量, 称为平均能流密度 (或称波的强度), 用 I 表示, 为

$$I = \frac{\bar{P}}{\Delta S} = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u \quad (7-41)$$

(5) 波的振幅变化

平面简谐波在传播过程中, 若介质不吸收能量, 则介质中各点的振幅不变。

球面波在传播过程中, 若介质不吸收能量, 则介质中各点的振幅为 $A \propto 1/r$, r 为球面到波源的距离 (半径)。

4. 波的叠加原理

几列波相遇时保持各自的特点通过媒质中波的叠加区域; 在它们重叠的区域内, 每一质点的振动都是各个波单独引起的振动的合成。

波的叠加原理包含两方面内容: 波传播的独立性和波的可叠加性。即几列波相遇后, 各列波仍然保持它们各自原有的特性 (频率、波长、振幅、振动方向等), 并按原来的方向继续前进; 在相遇区域内任一质点的振动位移, 为各列波单独存在时在该点所引起的振动位移的矢量和。

5. 惠更斯原理和波的衍射

(1) 惠更斯原理: 媒质中波前上的各点, 都可以看成是发射子波的波源, 其后任一时刻这些子波的包迹就是新的波前。根据这一原理, 只要知道了某一时刻的波面, 就可以用

几何作图的方法来确定下一时刻的波面，从而解决了波的传播问题，也较成功地解释了波的衍射图像。

(2) 波的衍射：波传播过程中，当遇到障碍物时，能绕过障碍物边缘而偏离直线传播的现象，称为波的衍射。相对于波长而言，障碍物的线度越大衍射现象越不明显。实验表明：当障碍物的线度可与波长相比拟时，衍射现象就明显，障碍物的线度越小衍射现象越明显。

6. 波的干涉

(1) 干涉现象：当两列（或几列）波在空间某一区域同时传播，叠加后的强度在空间这一区域内重新分布，形成有的地方强度始终加强，另一些地方强度始终减弱，整个区域中强度有某一稳定分布的现象，称为波的干涉。能产生干涉现象的波称为相干波，相应的波源称为相干波源。

(2) 干涉条件：两列（或几列）波频率相同、振动方向相同、相位相同或位相差恒定。

(3) 干涉加强、减弱的条件：设两个相干波源

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1 - 2\pi \frac{r_1}{\lambda}\right) \\ y_2 &= A_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2 - 2\pi \frac{r_2}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (7-42)$$

它们的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \quad (7-43)$$

相遇处的合振动方程及振幅为

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi) \\ A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi} \end{aligned} \quad (7-44)$$

当

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

时，则合振动的振幅有极大值，为 $A_{\max} = A_1 + A_2$ ，干涉加强（相长干涉）。

当

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm(2k+1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

时，则合振动的振幅有极小值，为 $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ ，干涉减弱（相消干涉）。

以上结论，对电磁波也同样适用，后续相关章节学习中注意类比。

(4) 波的强度：由于波的强度正比于振幅的平方，所以两列波叠加后的强度

$$I \propto A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi$$

即

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \varphi \quad (7-45)$$

可见, 两列波叠加后波的强度随着两列相干波在空间各点所引起的振动相位差的不同而不同。

7. 驻波

两列频率相同、振动方向和振幅都相同而传播方向相反的简谐波(两列相干波), 即 $y_1 = A \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)$ 、 $y_2 = A \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right)$, 叠加后形成驻波, 其波动方程为

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t \quad (7-46)$$

其振幅 $\left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$ 随 x 做周期变化, 因而为分段的独立振动, 在相邻两波节之间, 各质点的相位相同, 振动步调一致, 同时到达各自的最大位移, 又同时返回平衡位置。而在波节两侧的质点, 相位相反, 即振动步调相反, 分别沿 Oy 轴的正负方向运动。

介质在振动过程中, 驻波的动能和势能不断地转换, 在转换过程中, 能量不断地由波腹附近转移到波节附近, 再由波节附近转移到波腹附近, 在驻波行进过程中没有能量的定向传播。驻波与行波不同, 驻波行进过程中没有振动状态(相位)和波形的定向传播, 只有恒定的波腹和波节出现。

由式(7-46)可得波节、波腹位置。

波节位置: 在 $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$ 位置处, 即 $x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

波腹位置: 在 $\left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = 1$ 位置处, 即 $x = \pm k \frac{\lambda}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

半波损失: 当波从波疏介质到波密介质表面而反射时, 反射波在反射点的相位发生了 π 的突变, 这相当于波多走了半个波长的波程, 这种现象称为半波损失。亦即, 波由波疏媒质行进到波密媒质, 在分界面反射时会形成波节

8. 多普勒效应

观察者和波源之间有相对运动时, 观察者测到的频率 ν_r 和波源的频率 ν 不相同的现象, 称为多普勒效应, 两频率的关系为

$$\nu_r = \frac{u + v_0}{u - v_s} \nu \quad (7-47)$$

式中, u 是波速, v_0 为观察者相对介质运动的速度和 v_s 为波源相对介质运动的速度。当观察者向着波源运动时, $v_0 > 0$; 当观察者背离波源运动时, $v_0 < 0$; 波源向着观察者运动时, $v_s > 0$; 波源背离观察者运动时, $v_s < 0$ 。

从式(7-47)可见, 波源与观察者互相接近时, 接收到的频率就高于原来波源的频率;

两者互相远离时,接收到的频率就低于原来波源的频率。交通警察用于测量汽车速度的探测器就是利用多普勒效应原理。

*9. 声波

(1) 声波的概念

声波是机械波的一种。在弹性介质(固体、液体、气体)中,通常将频率在 $20 \sim 20\,000\text{ Hz}$ 的机械振动称为声振动,由声振动激起的波动称为声波。在空气与水中传播的声波是纵波,在固体中传播的声波则既可以是纵波,也可以是横波。

(2) 声波的分类

① 可闻声波:人耳能听到的声波的频率大约在 $20 \sim 20\,000\text{ Hz}$ 之间,这一频率范围内的声波称为可闻声波。

② 次声波:频率低于 20 Hz 的声波称为次声波,次声波不能被人耳听到。其特性是频率低 ($< 20\text{ Hz}$),波长长,大气吸收少,可以远距离传输,容易发生衍射,定向发射能力弱。

③ 超声波:频率高于 $20\,000\text{ Hz}$ 的声波称为超声波,超声波不能被人耳听到。由于频率高、波长短,故超声波与一般声波相比还有如下特征:

a) 能流密度大。由于能流密度与频率的平方成正比,故超声波的能流密度比一般声波大得多。

b) 方向性好。由于超声波的波长短,衍射效应不显著,故可以近似地认为超声波沿直线传播,即传播的方向性好,容易得到定向而集中的超声波束,能够产生反射、折射,也可以被聚焦。超声波的这一特性称为束射特性。

c) 穿透力强。超声波的穿透本领大,特别是在液体和固体中传播时,衰减很小,所以超声波主要用在固体和液体中。与电磁波相反,在空气中衰减较快。

(3) 声波的速度

机械波在不同介质中传播的速度是不同的,例如:

$$\text{固体内纵波的波速为} \quad u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7-48)$$

式中, E 为固体的弹性模量(杨氏模量), ρ 为固体的密度。

$$\text{流体中纵波的速度为} \quad u = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (7-49)$$

由理想气体状态方程 $p = \frac{M}{V} = \frac{M_{\text{mol}} p}{RT}$ 得到声波在气体中的传播速度为

$$u = \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT / M_{\text{mol}}} \quad (7-50)$$

式中, $\gamma = C_{P,m} / C_{V,m}$ 是气体的定压摩尔热容与定容摩尔热容之比, ρ 、 p 为气体的密度和压强。空气中的声速一般可近似用式(7-50)计算,例如,在 1 atm 和 0°C 时,空气中声速为 $u = \sqrt{1.4 \times 1.013 \times 10^5 / 1.293} = 331\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

声波的传播速度几乎与频率无关,但是由于速度与介质的密度有关,所以声波的传播速度对于温度和压强的变化很敏感。

在同一温度下,声波在液体与固体中的速度大于在空气中的速度。

(4) 声强

声波的能流密度称为声强。由平均能流密度的定义[见式(7-41)]有

$$I = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2 \quad (7-51)$$

式中, $Z = \rho u$ 是表征介质特性的一个常量,称为介质的特性阻抗。在 SI 制中,单位为 $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ 。可见,对声强产生直接影响的是角频率 ω 和振幅 A 。例如,对于超声波,由于 ω 大,故声强大;对于炮声,由于 A 大,故声强也大。声强太大(上限)或太小(下限)都不能引起听觉。常将听觉上限称为痛觉阈,下限称为听觉阈。

(5) 声强级

引起人们听觉的声强变化范围很大,约为 $10^{-12} \sim 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$,数量级相差很大。由此,为了比较介质中各点声波的强度,通常不使用声强,而是使用声强级。规定声强级的基准值为 $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$,即在 1000 Hz 时的声波能引起听觉的最弱声强。通常把声强 I 与基准声强之比的对数称为声强级,表达式为

$$I_L = \lg \frac{I}{I_0} \quad (7-52)$$

单位为贝尔(bel),实际上,贝尔这一单位太大,常采用分贝(dB)。此时声强级公式为

$$I_L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (7-53)$$

7.3 重点难点分析

1. 本章重点

本章对于简谐振动部分,重点内容是掌握简谐振动的特征、运动学方程及其应用,要能根据给定条件,写出简谐振动表达式和描述谐振动的基本特征量;掌握谐振动的描述方法和规律,掌握简谐振动的合成与分解;掌握两个同方向、同频率的简谐振动合成时相位差与振幅的计算;重点掌握运用解析法和旋转矢量表示法研究简谐振动的合成问题;掌握简谐振动的能量变化特征;对于电磁振荡的规律要加强认识。

对于波动章节内容,重点掌握平面简谐波的波动方程,波的产生,波的描述,波的能量,以及波的干涉和衍射、驻波等问题;学习波动方程时,重点掌握平面简谐波的波动方程,要理解建立波动方程的思路,理解波动方程的物理意义,明确机械波是机械振动在介质中的传播,掌握振动状态传播的规律;学习机械波的干涉问题时,要掌握波的相干条件,并能熟练地应用相位差或波程差的概念来分析和确定相干波叠加后振幅的极大与极小问题。掌握驻波的形成条件及其特点;对驻波和行波、半波损失等概念要注意理解。

2. 本章难点

机械振动中最简单、最基本的振动是简谐振动,任何复杂的振动都可看作是不同的频率的简谐振动的合成。因此,物体做简谐振动的判断以及从物体的受力分析判定物体是否做简谐振动是这部分内容的难点;其中简谐振动中抽象的相位 $(\omega t + \varphi_0)$ 和初相 φ_0 的概念容易产生理解错误,在比较两振动的相位差及求振动合成时都有一定困难。用旋转矢量表示法研究物体的简谐振动,有直观、简便的特点,但应当注意,旋转矢量本身并不做简谐振动,而是矢量 \mathbf{A} 的端点在过圆心的轴上的投影在做简谐振动,这点易产生错误理解。对于同方向、同频率的两个(或多个)简谐振动的合成原理、合成后什么情况下振幅最大、什么情况下振幅最小,这是要关心的问题,这对后续波的干涉、衍射具有重要意义。对于阻尼振动、受迫振动、共振、LC振荡电路这些知识点的学习都要注意从概念入手加以理解。

波动方程的建立是本章的难点之一,对此要从三个不同角度,即 $x = \text{常量}$, $t = \text{常量}$,以及 x 和 t 都变化这三个方面去仔细分析理解机械波的产生和传播的原理。另一个难点是对波的传播的认识,介质中各质点的振动是波源振动的重复,各质点的振动不同仅仅是相位不同,沿着波的传播方向,各质点的振动相位逐点滞后。因而,可以说波的传播是质点机械振动(或振动状态或是振动相位)在弹性介质中的传播,这部分中描述波动物理量中的波速 u 与振动速度 v 的概念。描述波的几何方法及图线法不易理解,容易出现错误;惠更斯原理和波的叠加问题,波的干涉,其中波的相干条件、波的干涉减弱条件难于理解;驻波波函数、驻波振幅分布、相位分布、半波损失等概念要注意正确理解。

7.4 精选例题与习题解答

1. 精选例题

(一) 振动

例 7-1 已知两个简谐振动的运动方程分别为 $y_1 = 5\cos(\omega t + \pi/2)$, $y_2 = 10\cos(\omega t + \pi)$,式中 y_1 和 y_2 以厘米为单位, t 以秒为单位,画出两简谐振动的图像,说明相位差是多少,哪个超前。

分析: 由旋转矢量图(见图 7.8)可知,在初始时刻($t = 0$),质点 I 的相位为 $\pi/2$,位移为 0,且向 y 轴负向运动;质点 II 的相位为 π ,位移为 10cm,且向 y 轴正向运动。由旋转矢量图可画出简谐振动图像。

解: y_1 和 y_2 的振动曲线如图 7.8(b)中的 I、II 所示;由旋转矢量图可知相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

从图可知 y_2 比 y_1 超前 $\pi/2$ 。

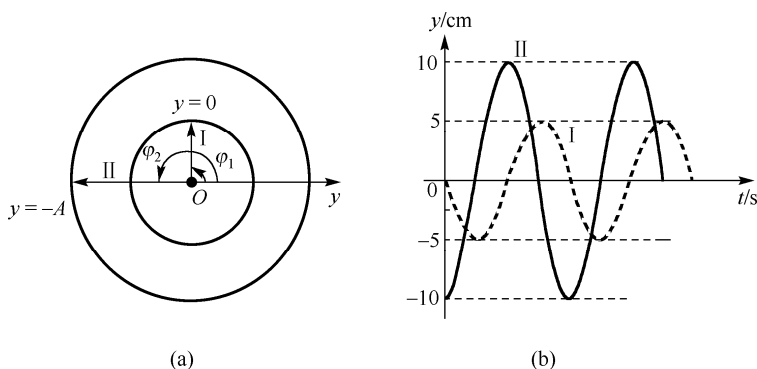


图 7.8 例 7-1 图

例 7-2 一轻弹簧在 60 N 的拉力下伸长 0.30 m。现把质量为 4 kg 的物体悬挂在该弹簧的下端并使之静止，再把物体向下拉 0.10 m，然后由静止释放并开始计时。求：(1) 物体的振动方程；(2) 物体在平衡位置上方 0.05 m 时弹簧对物体的拉力；(3) 物体从第一次越过平衡位置时刻起到它运动到上方 0.05 m 处所需要的最短时间。

分析：由已知的弹簧受拉力 f 和伸长 Δx 可确定特征常量 $\omega = \frac{k}{m}$ 。再由初始条件 $t = 0$ 时的位置 x_0 、速度 v_0 确定出该振动的初相位，从而写出振动方程；物体在平衡位置上方受力，可由动力学关系求出；第 3 问，可由振动方程分别求出质点过平衡位置的时间 t_1 和运动到上方某一位置的时间 t_2 ，再求出两时间之差即可。

解：由题意可得该振动的特征常量为

$$k = \frac{f}{\Delta x} = 200 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad \omega = \sqrt{k/m} \approx 7.07 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

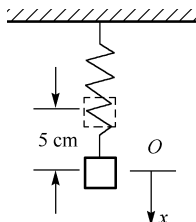


图 7.9 例 7-2 图

(1) 建立如图 7.9 所示的坐标系。选平衡位置为原点（即弹簧挂上 4 kg 物体静止时所在的位置为平衡位置）， x 轴向下为正。当 $t = 0$ 时，有

$$x_0 = A \cos \varphi_0 = 0.10, \quad v_0 = -A\omega \sin \varphi_0 = 0$$

解以上两式得 $A = 0.10 \text{ m}$, $\varphi_0 = 0$ ，所以振动方程为

$$x = 0.1 \cos(7.07t)$$

(2) 物体在平衡位置上方 ($x = 0.05 \text{ m}$) 时，弹簧对物体的拉力为

$$f = m(g - a)$$

而 $a = -\omega^2 x = 2.5 \text{ m/s}^2$ ，所以有

$$f = 4(10 - 2.5) \text{ N} = 30 \text{ N}$$

注意：此题也可以这样思考，当挂上 4 kg 的物体时，弹簧的伸长量为 0.20 m，当物体在平衡位置上方 0.05 m 时，弹簧的伸长量为 0.15 m，此时弹簧的拉力为

$$f = 200 \times 0.15 = 30 \text{ N}$$

(3) 设 t_1 时刻物体在平衡位置, 此时 $x=0$, 即

$$0 = A \cos \omega t_1 \quad \text{或} \quad \cos \omega t_1 = 0$$

所以, 由此可判断物体向上运动, 即 $v < 0$; 故 $\omega t_1 = \pi/2$, $t_1 = \pi/2\omega = 0.222 \text{ s}$ 。

再设 t_2 时物体在平衡位置上方 0.05 m 处, 此时 $x = -5$, 代入振动方程有 $-5 = A \cos \omega t_2$, 故 $\omega t_2 = 2\pi/3$, 得到 $t_2 = 0.296 \text{ s}$, 于是

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0.074 \text{ s}$$

例 7-3 在竖直悬挂的轻弹簧下端系一质量为 0.10 kg 的物体, 当物体处于平衡状态时, 再对物体加一拉力使弹簧伸长, 然后从静止状态将物体释放。已知物体在 32 s 内完成 48 次振动, 振幅为 0.05 m 。则 (1) 上述的外加拉力是多大? (2) 当物体在平衡位置以下 0.01 m 处时, 此振动系统的动能和势能各是多少?

分析: 由弹簧受力平衡情况, 可得弹簧受力与伸长的关系, 由式 (7-11) 初始时刻的位移和速度关系, 求出物体振动振幅 A , 并考虑特征常量 $\omega = k/m$, 从而得到外加拉力 ($F = kx$) 的大小; 由简谐振动系统的动能、势能关系, 可求出质点的动能、势能。

(1)

解法 1:

取平衡位置为原点, 向下为 x 正方向。设物体在平衡位置时弹簧的伸长量为 Δl , 则有 $mg = k\Delta l$, 加拉力 F 后弹簧又伸长 x_0 , 则得

$$F + mg - k(\Delta l + x_0) = 0, \quad \text{即} \quad F = kx_0$$

由题意可知, $t=0$ 时 $v_0=0$, $x=x_0$, 则 $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = x_0$ 。

由题意得, 物体振动周期 $T = \frac{32}{48} \text{ s}$, 角频率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$, 所以 $k = m\omega^2$, 故有

$$F = kA = (4\pi^2 m / T^2) A = 0.444 \text{ N}$$

平衡位置以下 0.01 m 处, 动能和势能分别为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

将数值代入上式得

$$v^2 = (2\pi/T)^2 (A^2 - x^2)$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 1.07 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(4\pi^2 m / T^2)x^2 = 4.44 \times 10^{-4} \text{ J}$$

解法 2:

从静止释放, 显然拉长量等于振幅 A (5 cm), $F = kA$ 。

考虑

$$k = m\omega^2 = 4m\pi^2\nu^2, \quad \nu = 1.5 \text{ Hz}$$

所以

$$F = 0.444 \text{ N}$$

(2) 总能量:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}FA = 1.11 \times 10^{-2} \text{ J}$$

当 $x = 1 \text{ cm}$ 时, $x = A/5$, 势能 E_p 占总能量的 $\frac{1}{25}$, E_k 占总能量的 $\frac{24}{25}$, 所以

$$E_k = \frac{24}{25}E = 1.07 \times 10^{-2} \text{ J}, \quad E_p = \frac{1}{25}E = 4.44 \times 10^{-4} \text{ J}$$

例 7-4 一个质点做简谐振动, 振动振幅为 A , 圆频率为 $\omega = \frac{\pi}{4}$ 。设 $t = 0$ 时质点在 $\frac{A}{2}$ 处向正方向运动, 经过 Δt 时间 (一个周期内) 该质点运动到 $-\frac{A}{\sqrt{2}}$ 处且其速度为正, 用旋转矢量法 (要求画出旋转矢量图) 求 Δt 。

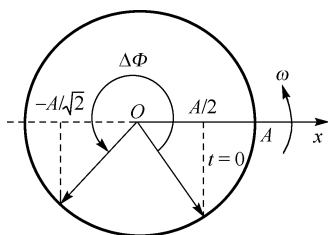


图 7.10 例 7-4 图

分析: 初始时刻质点的位移为 $A/2$ 处 (速度为正), 则初相位为 $-\pi/3$, 振动质点从 $A/2$ 处运动到 $-A/\sqrt{2}$ 处且其速度为正, 则对应相位为 $\pi + \pi/4$ 。因此, 两时刻的相位之差 $\Delta\Phi = (\pi + \pi/4) - (-\pi/3)$, 由已知的角频率 $\omega = \pi/4$, 则 $\Delta t = \Delta\Phi / \omega$ 。

解: 如图 7.10 所示, 画出旋转矢量图, 可知质点从 $A/2$ 处 (速度为正) 运动到 $-A/\sqrt{2}$ 处 (速度为正) 时旋转矢量转过的角度为

$$\Delta\Phi = \pi + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{19}{12}\pi$$

已知旋转矢量的旋转角速度 (即质点振动圆频率) 为 $\pi/4$, 故需要的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{\omega} = \frac{\frac{19}{12}\pi}{\frac{\pi}{4}} = \frac{19}{3} \text{ s}$$

例 7-5 已知三个同方向的简谐振动方程分别为 $x_1 = 6\cos(\pi t + \pi/2)$, $x_2 = 3\sin(\pi t + \pi/2)$, $x_3 = 2\cos(\pi t - \pi/2)$, 求这三个简谐振动的合振动。

分析: 这是求三个同频率简谐振动的合成问题, 直接由数学关系求解。

解: 由三角函数运算可得它们的合振动方程为

$$\begin{aligned}
 x &= x_1 + x_2 + x_3 \\
 &= 6\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 3\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= 4\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 3\cos(\pi t) \\
 &= 5\cos\left[\pi t + \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right]
 \end{aligned}$$

所以, 合成后的振幅、相位分别为

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \\
 \varphi &= \arctan\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)
 \end{aligned}$$

(二) 波动

例 7-6 已知平面简谐波的波动方程为 $y = 20\cos\pi(2.5t - 0.01x)$, 求其波长、周期和波速。

分析: 已知波动方程求描述波动的物理量, 常用的方法是先将波动方程与标准方程进行比较, 然后“对号入座”便可求出待求的物理量。

解: 将题设的方程与波动方程的标准式 $y = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ 进行比较, 得

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 0.01\pi, \quad \frac{2\pi}{T} = 2.5\pi$$

解之得波长、周期分别为

$$\lambda = \frac{2}{0.01} = 200 \text{ m}, \quad T = \frac{2}{2.5} = 0.8 \text{ s}$$

故波速为

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{200}{0.8} = 250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

例 7-7 某平面波在坐标原点 O 处的振动方程为 $y_0 = A\cos\omega t$, 设波速为 u , 入射波到达距离原点 L 处反射时没有半波损失, 求反射面处的入射波和反射波的表达式。

分析: 机械波是机械振动在介质中的传播, 传播的是振动状态, 介质中各质点的振动是波源振动的重复, 不同的仅仅是相位, 沿着波的传播方向, 各质点的振动相位逐点滞后。因而可根据题设条件写出其他任意质点的振动方程, 即波函数 y 。

解: 由题设条件知, 入射波的波动方程为 $y_{\lambda} = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$, 波自 O 点传到反射处的时间 $\Delta t = \frac{L}{u}$ 。故入射波在反射面处的表达式为

$$y_L = A \cos \omega \left(t - \frac{L}{u} \right)$$

入射波到达反射面后便沿 x 轴的负向传播, 到达任意点 x 处所需的时间为

$$\Delta t' = \frac{L-x}{u}$$

于是, 反射波的波动方程为

$$y_{\text{反}} = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{L-x}{u} \right) - \frac{\omega L}{u} \right] = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{u} \right) - \frac{2\omega L}{u} \right]$$

例 7-8 一正弦波在空气中沿直径为 0.14 m 的圆柱形管行进, 波的强度为 $9 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$, 角频率为 300 Hz , 波速为 $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 求:

(1) 波的平均能量密度和最大能量密度。

(2) 两相邻的同相面间的波中平均含有的能量。

分析: 单位体积媒质所具有的能量为波的能量密度 $w = dE/dV$, 能量密度在一个周期内的平均值称为波的平均能量密度, 但在本题中可直接应用平均能量密度与波强、波速的关系 $\bar{w} = \frac{I}{u}$ 求解。因为平均能量密度为能量密度在一个周期内的平均值, 由式 (7-39) 有

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2, \text{ 所以最大能量密度 } w_m = \rho A^2 \omega^2 = 2\bar{w}.$$

解: (1) 由题意知, 垂直于波传播方向的面积

$$S = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = 3.14 \times \left(\frac{0.14}{2} \right)^2 = 1.54 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

由平均能量密度与波强、波速的关系得

$$\bar{w} = \frac{I}{u} = \frac{9 \times 10^{-3}}{300} = 3 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

最大能量密度

$$w_m = \rho A^2 \omega^2 = 2\bar{w} = 6 \times 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

(2) 两相邻同相位面间的波带中包含的能量就是一个波长距离空间中包含的能量 \bar{w}_λ , 而

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) = w_m \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

故

$$\begin{aligned} \bar{w}_\lambda &= \int_0^\lambda w S dx = \int_0^\lambda S w_m \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} w_m S \lambda = \frac{1}{2} w_m S \frac{u}{v} = \frac{6 \times 10^{-5}}{2} \times 0.0154 \times \frac{300}{300} = 4.62 \times 10^{-7} \text{ J} \end{aligned}$$

例 7-9 两相干波源 B、C 相距 30 m，振幅均为 0.01 m，初相差为 π 。两波源相向发出平面简谐波，频率均为 100 Hz，波速均为 $430 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。求：

- (1) 两波源的振动方程。
- (2) 两谐波的波动方程。
- (3) 在线段 BC 上，因干涉而静止的各点的位置。

分析：由已知振幅、初相和频率条件可得到 B、C 两点的振动方程；根据两波源距离和传播方向可得到两波的波动方程；两波相向传播，产生干涉，根据干涉产生极值条件可确定静止点的位置。

解：(1) 建立坐标系。设波源 B 位于坐标系的原点 O，初相 $\varphi_B = 0$ ，则波源 C 的初相 $\varphi_C = \pi$ 。两波源的振动方程分别为

$$y_B = 0.01 \cos 200\pi t, \quad y_C = 0.01 \cos(200\pi t + \pi)$$

- (2) 设 x 为 B、C 间的任一点，则两波的波动方程分别为

$$y_B = 0.01 \cos 200\pi \left(t - \frac{x}{430} \right)$$

$$y_C = 0.01 \cos \left[200\pi \left(t + \frac{x-30}{430} \right) + \pi \right] = 0.01 \cos \left[200\pi \left(t + \frac{30-x}{430} \right) + \pi \right]$$

- (3) 因干涉而静止的点是合振幅有极小值的点，故

$$\Delta\varphi = \varphi_C - \varphi_B = \pi + \frac{x-30+x}{430} \times 200\pi = (2k+1)\pi$$

解之得

$$x = 15 + 2.15k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6)$$

例 7-10 如图 7.11 所示， S_1 、 S_2 为两个相干波源，间距为 $\lambda/4$ ， S_1 的相位比 S_2 的超前 $\pi/2$ 。如果两波在 S_1 和 S_2 的连线方向上各点强度相同，均为 I_0 。求 S_1 、 S_2 的连线上 S_1 及 S_2 外侧各点合成波的强度。

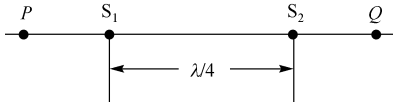


图 7.11 例 7-10 题图

分析：首先确定 S_1 、 S_2 两个相干波源的波动方程，继而求两波源到 P 、 Q 两点的相位差，由相干波叠加后的振幅关系、振幅与合成波强度的关系求解。

解：设 P 为波源 S_1 外侧任意一点，与 S_1 距离为 r_1 ； P 与波源 S_2 距离为 r_2 ，则 S_1 、 S_2 的振动传到 P 点的相位差

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{20} - \varphi_{10} + \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} \left(-\frac{\lambda}{4} \right) = -\pi$$

故合振幅 $A = |A_1 - A_2| = 0$ ， $I_P = 0$ 。

设 Q 为 S_2 外侧的任意一点，同理可求得 S_1 、 S_2 的振动传到 Q 的相位差

$$\Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = 0$$

故合振幅 $A = A_1 + A_2 = 2A_1$, 合成波的强度与入射波的强度之比为

$$\frac{I_Q}{I_0} = \frac{4A_1^2}{A_1^2} = 4$$

即 $I_Q = 4I_0$ 。

例 7-11 一简谐波沿 Ox 轴正向传播, 波长 $\lambda = 4\text{ m}$, 周期 $T = 4\text{ s}$, 已知 $x = 0$ 处质点的振动曲线如图 7.12(a)所示。

(1) 写出 $x = 0$ 处质点的简谐振动方程。

(2) 写出波的表达式。

(3) 画出 $t = 1\text{ s}$ 时刻的波形曲线。

分析: 由振动曲线可知, 质点振动的振幅为 $\sqrt{2}$, 初始时刻质点的位移为 $-\sqrt{2}/2$, 且向 y 轴的负向运动。图 7.12(b)所示为相应的旋转矢量图, 由旋转矢量法可知初相位为 $2\pi/3$, 由此可得 $x = 0$ 处质点振动方程; 由振动到达任意点 x 处所需的时间 $t' = x/u = xT/\lambda$, 所以任意点振动滞后 $t - t'$ 时间, 用 $t - t'$ 代替振动方程中的时间 t , 即得到波动方程; 最后由波动方程画 $t = 1\text{ s}$ 时的波形图 (表示在 $t = 1\text{ s}$ 时刻波线上所有质点位置变化)。

解: (1) 根据质点简谐振动方程

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

其初相可由旋转矢量法求得, 如图 7.12(b)所示, $t = 0$ 时, $y = -\sqrt{2}/2$, 则有初相

$$\varphi = \frac{2}{3}\pi$$

所以, $x = 0$ 处质点振动方程为

$$y_0 = \sqrt{2} \times 10^{-2} \cos\left(\frac{1}{2}\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

(2) 波动方程为

$$y = \sqrt{2} \times 10^{-2} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{4}\right) + \frac{2\pi}{3}\right]$$

(3) $t = 1\text{ s}$ 时刻的波形曲线如图 7.12(c)所示。

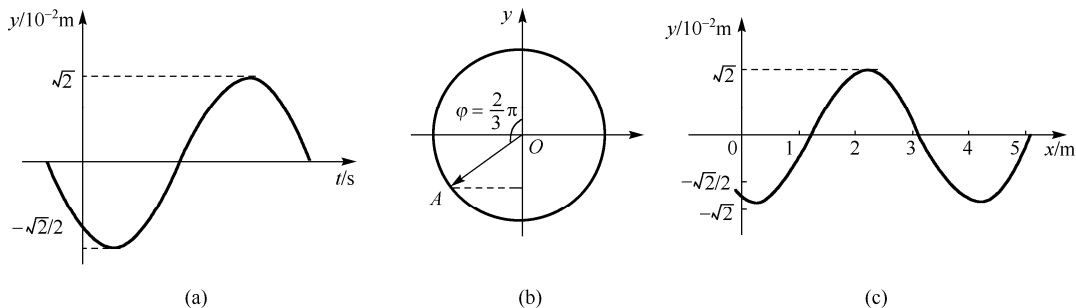


图 7.12 例 7-11 图

例 7-12 两列波在一根很长的细绳上传播, 其波动方程为 $y_1 = 0.06 \cos \pi(x - 4t)$, $y_2 = 0.06 \cos \pi(x + 4t)$ 。

(1) 证明细绳上的振动为驻波式振动。

(2) 求波节和波腹的位置。

(3) 波腹处的振幅有多大? 在 $x = 1.2 \text{ m}$ 处的振幅为多少?

分析: y_1 、 y_2 是两列频率相同、振动方向和振幅都相同而传播方向相反的简谐波, 将其叠加后求出驻波方程; 由其振幅随 x 做周期变化关系, 求出波节、波腹位置。

解: (1) 合成波的方程

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = 0.06 \cos \pi(x - 4t) + 0.06 \cos \pi(x + 4t) \\ &= 2 \times 0.06 \cos \frac{\pi(x - 4t) + \pi(x + 4t)}{2} \times \cos \frac{\pi(x - 4t) - \pi(x + 4t)}{2} \\ &= 0.12 \cos \pi x \cos 4\pi t \end{aligned}$$

其振幅 $|0.12 \cos \pi x|$ 随 x 做周期变化, 故细绳上的振动为驻波式振动。

(2) 波节位置: 在 $\cos \pi x = 0$ 位置处, 即有 $\pi x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, 故波节位置坐标

$$x = \frac{1}{2}(2k + 1), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

波腹位置: 在 $|\cos \pi x| = 1$ 位置处, 即 $\pi x = k\pi$, 故波腹位置坐标

$$x = k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(3) 由合成波方程知, 波腹处的振幅 $A = 0.12 \text{ m}$; 在 $x = 1.2 \text{ m}$ 处的振幅

$$A_{1.2} = |0.12 \cos 1.2\pi| = 0.097 \text{ m}$$

2. 习题解答

(一) 振动部分

7.1 下列 4 种运动 (忽略阻力) 中哪一种简谐振动? ()

A. 小球在地面上做完全弹性的上下跳动

B. 细线悬挂一小球在竖直平面上做大角度的来回摆动

C. 浮在水里的一均匀矩形木块, 将它部分按入水中, 然后松开, 使木块上下浮动

D. 浮在水里的一均匀球形木块, 将它部分按入水中, 然后松开, 使木块上下浮动

分析与解: 根据简谐振动的定义: a) 动力学定义: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$; b) 运动学定义:

$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ 。A 选项的动力学方程为 $\frac{d^2x}{dt^2} = g$, 与简谐振动的运动学方程不一致, 且

小球不是做往复运动, 故 A 不是简谐振动; B 选项的运动学方程为 $mg \sin \theta = -ml \frac{d^2\theta}{dt^2}$, 因

为是大角度摆动, 所以 $\sin \theta \neq \theta$, 与简谐振动方程不一致; C 选项的动力学方程为

$m \frac{d^2x}{dt^2} = \rho g s \left(x + \frac{1}{2}a \right) - mg \left(mg = \rho g s \cdot \frac{1}{2}a \right)$, 令 x 向上为正方向时有 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\rho g s}{m} x = 0$, 所以

C 答案正确; D 选项中动力学方程中的横截面积是 x 的函数, 即 $s(x)$, 将 $s(x)$ 代入 C 中的动力学方程得不到简谐振动的动力学定义方程, 即由于球形是非线性形体, 亦即 D 选项错误, 故本题正确答案选 C。

7.2 一质量为 m 的物体挂在劲度系数为 k 的轻弹簧下面, 其振动周期为 T 。若将此轻弹簧分割成三等份, 将一质量为 $2m$ 的物体挂在分割后的一根弹簧上, 则此弹簧振子的周期应为 ()。

- A. $\frac{3}{\sqrt{6}}T$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}T$ C. $\sqrt{2}T$ D. $\sqrt{6}T$

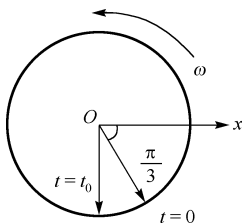


图 7.13 习题 7.3 图

分析与解: 将弹簧分割成三等份后, 其劲度系数变为原来的 3 倍, 此时再挂上一个质量为原来 2 倍的物体, 根据周期计算表

达式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 可计算出周期为 $\frac{\sqrt{6}}{3}T$, 故正确答案选择 B。

7.3 一个质点做简谐振动, 已知质点由平衡位置运动到二分之一最大位移处所需要的最短时间为 t_0 , 则该质点的振动周期 T 应为 ()。

- A. $4t_0$ B. $12t_0$ C. $6t_0$ D. $8t_0$

分析与解: 根据题意作出旋转矢量图, 如图 7.13 所示, “由平衡位置运动到二分之一最大位移处所需要的最短时间”可知质点在平衡位置时的初相位是 $-\frac{\pi}{2}$, 运动到二分之一

最大位移处的相位是 $-\frac{\pi}{3}$, 所转过的角度是 $\frac{\pi}{6}$, 经历的时间是 t_0 , 所以角速度为 $\omega = \frac{\pi}{6t_0}$,

周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 12t_0$, 故正确答案选择 B。

7.4 一简谐振动的旋转矢量图如图 7.14 所示, 设图中圆的半径为 R , 则该简谐振动的振动方程为 ()。

- A. $x = R \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ B. $x = R \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$
C. $x = R \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ D. $x = R \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$

分析与解: 由图 7.14 可知, 初相为 $\frac{\pi}{4}$, 振幅为 R , 在 t 时间内转过的角度为 πt , 则角速度为 π , 故正确答案应选择 A。

7.5 某弹簧振子的振动曲线如图 7.15 所示, 则由图可确定 $t = 2\text{ s}$ 时, 振子的速度为 ()。

- A. $3\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ B. $-3\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ C. $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ D. $-3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

分析与解: 地球上单摆的周期表达式为 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 将单摆拿到月球上, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{g}{6}}} = \sqrt{6} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{6}T_0$, 所以选择 C。

7.10 已知某简谐振动的振动曲线如图 7.17(a)所示, 位移的单位为米, 时间单位为秒, 则此简谐振动的振动方程为 ()。

A. $x = 10\cos\left(\frac{11\pi}{24}t + \frac{2}{3}\pi\right)$

B. $x = 10\cos\left(\frac{7\pi}{24}t - \frac{7}{6}\pi\right)$

C. $x = 10\cos\left(\frac{7\pi}{24}t - \frac{2}{3}\pi\right)$

D. $x = 10\cos\left(\frac{11\pi}{24}t - \frac{2}{3}\pi\right)$

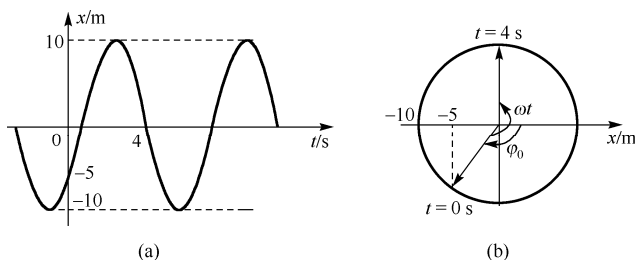


图 7.17 习题 7.10 图

分析与解: 由已知运动方程画振动曲线和由振动曲线求运动方程是振动中常见的两类问题。本题就是要通过 $x-t$ 振动曲线确定振动的三个特征量 A 、 ω 和 φ_0 , 从而写运动方程。曲线的最大值即为振幅 A ; 而 ω 和 φ_0 通常可通过旋转矢量法或解析法解出, 常用旋转矢量法更为方便。下面由两种方法求解。

旋转矢量法: 由图 7.17(b)可知振幅 $A = 10$ m; 由图可见初相 $\varphi_0 = -\frac{2\pi}{3}$; 而由 $\omega t = \pi + \frac{\pi}{6}$, 得 $\omega(4) = \frac{7\pi}{24}$; 代入得振动方程为 $x = 10\cos\left(\frac{7\pi}{24}t - \frac{2}{3}\pi\right)$, 故选择 C。

解析法: 由图可知振幅为 10 m。将 $t = 0$ 代入标准振动方程得 $-5 = 10\cos\varphi_0$, 且 $t = 0$ 时, 质点速度 $v_0 > 0$ 得, $\varphi_0 = -\frac{2\pi}{3}$ 。将 $t = 4$ 代入振动方程得 $\cos\left(4\omega - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{7\pi}{24}$, 故答案选择 C。

7.11 已知两同方向、同频率的简谐振动的振动方程分别为 $x_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$, $x_2 = A_2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$, 则它们的合振幅应为 ()。

A. $|A_1 - A_2|$

B. $A_1 + A_2$

C. $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

D. $\sqrt{|A_1^2 - A_2^2|}$

分析与解：可采用解析法或旋转矢量法求解。由旋转矢量合成可知，两个同方向、同频率简谐振动的合成仍为一简谐振动，其角频率不变；所以合振动的振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$ ，由于二者相位相差 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ 。故正确答案应选择 C。

7.12 若简谐振动 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 的周期为 T ，则简谐振动 $x' = B\cos(n\omega t + \varphi_0 + \pi)$ 的周期为_____。

分析与解：根据周期公式 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ，可得 $T' = \frac{2\pi}{n\omega} = \frac{T}{n}$ 。所以，简谐振动 x' 的周期为 $\frac{T}{n}$ 。

7.13 已知简谐振动 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 的周期为 T ，在 $t = \frac{T}{2}$ 时的质点速度为_____，加速度为_____。

分析与解：由运动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 两端对时间 t 求导，可得速度方程 $v = -A\omega\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$ 和加速度方程 $a = -A\omega^2\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$ 。将时间 $t = \frac{T}{2}$ 代入速度方程得 $v\left(\frac{T}{2}\right) = -A\omega\sin(\pi + \varphi_0)$ ；将时间 $t = \frac{T}{2}$ 代入加速度方程得 $a\left(\frac{T}{2}\right) = -A\omega^2\cos(\pi + \varphi_0)$ 。

7.14 一简谐振动的振动曲线如图 7.18 所示，则由图可得其振幅为_____，其初相为_____，其周期为_____，其振动方程为_____。

分析与解：由图可知振幅是 10 cm。当 $t = 0$ 时，质点在 $x_0 = -\frac{A}{2}$ ，且速度 $v_0 < 0$ 。所以，初相 $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$ ；当 $t = 2$ 时，质点在 $x = 0$ ，且速度 $v > 0$ 。所以 $\omega = \frac{5\pi}{12}$ ，周期为 $\frac{24}{5}$ s。

振动方程为 $x = 0.1\cos\left(\frac{5\pi}{12}t + \frac{2}{3}\pi\right)$ 。

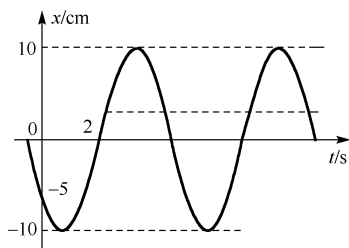


图 7.18 习题 7.14 图

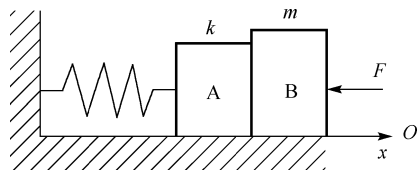


图 7.19 习题 7.15 图

7.15 如图 7.19

所示，初始时两质量均为 m 的无黏合的物体 A、B 向左压缩劲度系数为 k 的弹簧，然后放手，则物体 A 第一次到达正最大位移处所用的时间为_____。若初始时弹簧被压缩 x_0 ，则物体 A 第一次到达正最大位移处时 B 物体的

速度为_____。

分析与解：根据题意，A 第一次到达正的最大位移处所用的时间需要分成两个时间段来考虑，即第一次到达平衡位置所用的时间加上从平衡位置到最大位移所需要的时间。A 物体从左第一次到达平衡位置时是 A、B 两物体与弹簧相连接一起运动，此时所需要的时间为 $T_1 = \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}}$ ，其中 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$ 。从平衡位置第一次到达正的最大位移处时是只

有 A 物体与弹簧相连接, 此时所需要的时间为 $T_2 = \frac{T'_0}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$, 其中 $T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ 。则总时间为 $t = T_1 + T_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} (\sqrt{2} + 1)$ 。根据在初始时刻所系统所具有的弹性势能转化为在平衡位置处的动能可得 $\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} (2m) v^2$, 解得速度为 $v = x_0 \sqrt{\frac{k}{2m}}$ 。

7.16 已知弹簧振子的弹簧的劲度系数为 k , 其振动的振幅为 A , 则当振子移动到正的 $1/2$ 最大位移处时的动能为_____。

分析与解: 由题可知弹簧的总能量为 $E = \frac{1}{2} k A^2$, 当振子运动到正的 $1/2$ 最大位移处时的弹性势能为 $E_p = \frac{1}{2} k \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} k A^2$, 则动能为 $E_k = E - E_p = \frac{3}{8} k A^2$ 。

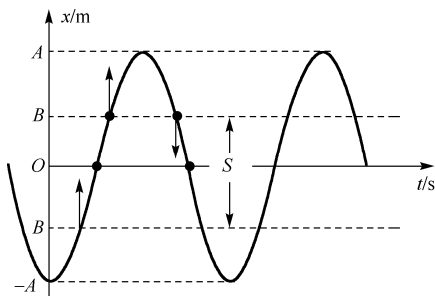


图 7.20 习题 7.17 图

7.17 一质点做简谐振动如图 7.20 所示, 已知质点在一个周期内相继经过距离为 S 的两点 A、B, 历时 T , 且质点在 A 点和 B 点的速度相同; 再经过 T 后, 质点又一次经过 B 点, 则该质点运动的周期为_____, 振幅为_____。

分析与解: 因为质点在 A 点和 B 点的速度相同, 所以 A、B 为相对平衡位置对称的两点。又因为“再经过 T 后, 质点又一次经过 B 点”, 所以可以知道从平衡位置 O 到正的最大位移 A 所需要的时间是

$T = \frac{T}{2} + \frac{T}{2}$, 所以该质点的运动周期为 $4T$, 角频率为 $\frac{\pi}{2T}$ 。根据图形可知初相为 $\varphi_0 = \pi$ 。

由题意也可知当物体从负的最大位移移动到 B 点时所需要的时间为 $\frac{3T}{2}$, 则有

$$\frac{S}{2} = A \cos\left(\omega \frac{T}{2} + \pi\right), \text{ 解得 } A = \frac{\sqrt{2}}{2} S。$$

7.18 已知一弹簧振子由 $m = 3 \text{ kg}$ 的物体与劲度系数 $k = 12 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ 组成, 其振幅为 $A = 2 \text{ m}$, 沿 x 轴运动, 并从物体处于最大位移处时开始计时, 则其角频率为_____, 初相为_____, 其振动方程为_____, $t = \frac{\pi}{8} \text{ s}$ 时, 作用于该物体的力的大小为_____, 方向为_____。

分析与解: 弹簧振子系统的角频率只与振子的质量与劲度系数有关, 可直接用公式计算角频率; 因为振子处于最大位移时计时, 所以振子速率为负, 也就可确定初相。从而确定振动方程。

$$\text{根据频率计算公式可得角频率 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}。$$

由初始条件, $t = 0$ 时, $x_0 = A$, 且 $v_0 < 0$, 所以 $\varphi_0 = 0$, 振动方程为 $x(t) = 2 \cos 2t$ 。

由于物体的加速度为 $a(t=8) = -8\cos 2\frac{\pi}{8} = -4\sqrt{2}$ ，所以当 $t = \frac{\pi}{8}$ s 时，作用力为 $F(t) = ma = -12\sqrt{2}$ N，方向沿 x 轴负向。

7.19 已知一简谐振动的振动方程为 $x = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ ，请分别作出位移、速度、加速度随时间变化曲线。

分析与解：该题为已知振动方程而作 $x-t$ 、 $v-t$ 、 $a-t$ 曲线，实际上只要由 $x(t)$ 的解析式，分别对时间求一阶导数、二阶导数即可得到 $v(t)$ 、 $a(t)$ 从而作出 $v-t$ 、 $a-t$ 曲线。

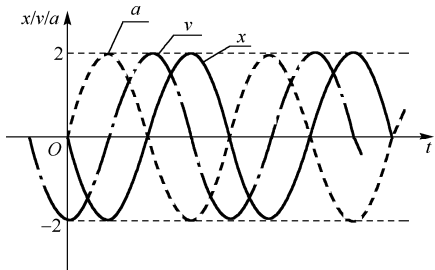


图 7.21 习题 7.19 图

根据振动方程 $x(t)$ ，可以求出速度方程 $v(t)$ 和加速度方程 $a(t)$ ，分别为 $v = -2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $a = -2\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ ，由函数关系式作图，曲线如图 7.21 所示。

7.20 质量为 m 的物体与劲度系数为 k 的弹簧组成弹簧振子的振动动能的变化频率为_____，其势能的变化频率为_____。

分析与解：弹簧振子动能和势能都随时间变化，但总能量不随时间变化，即机械能守恒。动能和势能变化是周期性的。

弹簧振子动能表达式为 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ，其中 $v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$ ，将速度关系式代入动能表达式得

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}kA^2\left(1 - \cos 2\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

可见， E_k 是周期性变化的，变化频率为

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

同理，弹簧振子势能表达式为 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ ，其中 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ ，将振动关系式代入势能表达式得

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}kA^2\left(1 + \cos 2\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

可见， E_p 是周期性变化的，变化频率为，所以

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

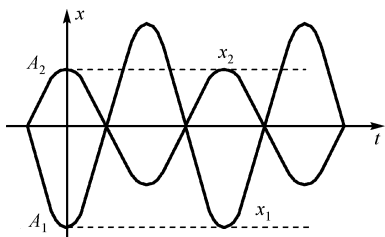


图 7.22 习题 7.21 图

7.21 已知一物体同时参与两个同方向、同频率的简谐振动,这两个简谐振动的振动曲线如图 7.22 所示,其中 $A_1 > A_2$, 则该物体振动的初相为_____。

分析与解: 两个同方向、同频率简谐振动的合成仍为一简谐振动,其角频率不变;所以合振动的振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$, 由于二者相位相差 $\Delta\varphi = \pi$, 所以合成后的振幅为 $A = |A_1 - A_2|$, 合振动的

初相位为 $\varphi = \arctan[(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) / (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)]$, 若 $\varphi_1 = \pi$ (由已知曲线确定), 则 $\varphi_2 = 0$, 故 $\varphi = \pi$, 即与 x_1 同相为 π 。

7.22 如图 7.23 所示,一质量为 m 的滑块,在光滑的水平面上与劲度系数为 k 的弹簧相连,另一质量为 $M = 3m$ 的滑块用一根轻绳绕过一质量可忽略不计的定滑轮与滑块 m 连接。 $t = 0$ 时弹簧处于原长状态,求滑块 M 的运动方程。(设 M 处于平衡位置时为坐标原点,以向下为正方向。)

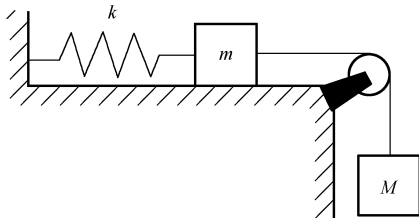


图 7.23 习题 7.22 图

分析: 对 m 、 M 进行受力分析,然后由牛顿第二定律得到两物体的动力学方程;又由于两物体用轻绳连接,所以绕过定滑轮作用在 m 、 M 上力的大小相等,以及两物体位移大小、加速度等量相等。于是由上述关系,联立两动力学方程可得该系统的动力学方程。再由初始条件解此动力学方程。

解: 设 M 处于平衡位置时为坐标原点,以向下方向为正方向,对 m 、 M 做受力分析,由牛顿第二定律可得

$$Mg - T_1 = M \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (1)$$

$$T_2 - kx_2 = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (2)$$

由于两物体用轻绳连接,所以绕过定滑轮作用在 m 、 M 上力的大小相等,以及两物体位移大小、加速度等量相等,亦即有

$$T_1 = T_2 = T, \quad x_1 = x_2 = x, \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3)$$

解式 (1)、式 (2)、式 (3) 得

$$Mg - kx = (M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (4)$$

令 $y = Mg - kx$ 并将该式两端对时间求导,得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -k \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (5)$$

比较式(4)、式(5)有

$$y = -\frac{(M+m)}{k} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

又令 $\omega^2 = \frac{k}{M+m} = \frac{k}{4m}$, 并代入上式得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (6)$$

求解该二阶微分方程, 得

$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

再代入 $y = Mg - kx$, 同时将 x 用 $x(t)$ 表示, 亦即有

$$x(t) = \frac{Mg}{k} - \frac{1}{k} A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

由初始条件, 当 $t=0$ 时, $x(0)=0$, 且 $\frac{dx}{dt} > 0$, 得

$$Mg = A \cos \varphi_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = -\frac{1}{k} A \omega \sin \varphi_0, \quad A = Mg, \quad \varphi_0 = \pi$$

所以运动方程为

$$x(t) = \frac{Mg}{k} - \frac{Mg}{k} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}t + \pi\right)$$

当 M 处于平衡位置时, 可由 $Mg = kx_0$ 计算弹簧的伸长量为 $x_0 = \frac{Mg}{k}$, 所以运动方程又可写为

$$x(t) = x_0 \left[1 - \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}t + \pi\right) \right]$$

7.23 一个质点做简谐振动, 其运动速度与时间的曲线如图 7.24 所示, 求该质点的振动方程。

分析: 由已知运动方程作振动曲线和由振动曲线求运动方程是振动中常见的两类问题。本题就是由运动速度与时间的 $v-t$ 曲线, 确定振动的三个特征量 A 、 ω 和 φ_0 , 从而写出振动方程。

解: 设振动方程为 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$, 则速度方程为

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

由曲线可知速度振幅为 $\omega A = 10$ 。又由图可知当 $t=0$ 时, $v(0) = -10 \sin \varphi_0 = -5$, 即有

$$\sin \varphi_0 = \frac{1}{2}, \quad \varphi_0 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

当 $t=4$ 时, v 最大, 即有 $|v_m| = \omega A$, 代入速度方程, 故

$$\sin\left(4\omega + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \quad \text{或} \quad 4\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

即 $\omega = \frac{\pi}{3}$, 于是得到 $A = \frac{30}{\pi}$ 、 $\omega = \frac{\pi}{3}$ 和 $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$ 三个特征量, 所以振动方程为

$$x = \frac{30}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

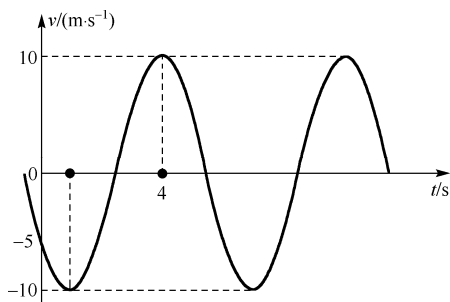


图 7.24 习题 7.23 图

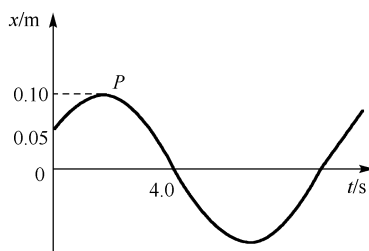


图 7.25 习题 7.24 图

7.24 已知某质点做简谐运动, 振动曲线如图 7.25 所示, 试根据图中数据, 求 (1) 振动表达式; (2) P 点的相位; (3) 与 P 点对应的时刻。

分析: 由振动的 $v-t$ 曲线确定振动的三个特征量 A 、 ω 和 ϕ_0 , 从而写出振动方程。当 $t=0$ 时可由振动方程得到初相; 当 $t=4$ 时, 质点到达最大值, 将其代入振动方程可求出角频率。

解: (1) 设振动表达式为

$$x = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

由题图曲线可知振幅为 $A = 0.1 \text{ m}$ 。

又由题图曲线可知, 当 $t=0$ 时, 有 $x_0 = 0.1 \cos \phi_0 = 0.05$, 且 $v_0 > 0$, 所以初相为 $\phi_0 = -\frac{\pi}{3}$;

又当 $t=4$ 时, 有 $x_4 = 0.1 \cos\left(4\omega - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 且 $v_4 < 0$, 于是得到角频率为 $\omega = \frac{5\pi}{24}$ 。因而得到振动方程为

$$x = 0.1 \cos\left(\frac{5\pi}{24}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

(2) 由题图曲线可知在 P 点, 有 $x = 0.1 \cos\left(\frac{5\pi}{24}t - \frac{\pi}{3}\right) = 0.1$, 因此 P 点相位为 $\frac{5\pi}{24}t - \frac{\pi}{3} = 0$ 。

(3) 由 P 点相位 $\frac{5\pi}{24}t - \frac{\pi}{3} = 0$ 解出与 P 点状态相应的时刻为 $t = 1.6 \text{ s}$ 。

7.25 如图 7.26 所示, 一立方形木块浮于静水中, 其浸入部分高度为 a 。今用手指沿

竖直方向将其慢慢压下,使其浸入水中部分的高度为 b ,然后放手让其运动。试证明:若不计水对木块的黏滞阻力,木块的运动是简谐振动并求出周期及振幅。

分析:要证明立方木块做简谐振动,要分析木块在平衡位置附近上下运动时,它所受合力 F 与位移 x 之间的关系。如果木块受力满足 $F = -kx$,则木块作简谐振动。继而通过 $F = -kx$,即可解出相关的周期及振幅。

证明:木块在水中静止时,浮力大小为 $f = \rho g a S = mg$ 。当木块在水中上下振动时,建立如题图所示坐标系,取木块静止时的质心为坐标原点 O ,竖直向下为 x 轴正向。则当木块向下偏移 x 位移时,受合力为

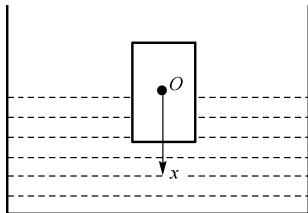


图 7.26 习题 7.25 图

$$F' = mg - (f + \rho g x S) = -\rho g x S = -kx$$

式中 $k = \rho g S$ 是一常量(S 是木块在水中的横截面积),这表明木块在水中上下所做的微小振动是简谐振动。

由木块所受合力,可得木块振动的微分方程为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\rho g x S}{m}$$

令 $\omega^2 = \frac{\rho g S}{m}$, 即有 $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$, 该式是简谐振动的微分方程, 它的通解为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

故木块振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

当 $t = 0$ 时, $x_0 = b - a$, $v_0 = 0$ 。所以, 木块的振动的振幅 A 、初相 φ_0 分别为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = b - a, \quad \varphi_0 = 0$$

故木块的简谐振动方程为

$$x = (b - a) \cos(\omega t)$$

7.26 有两个同方向、同频率的简谐振动, 其合振动的振幅为 0.2 m , 合振动的相位与第一个振动的相位之差为 $\pi/6$, 若第一个振动的振幅为 0.173 m , 求第二个振动的振幅;

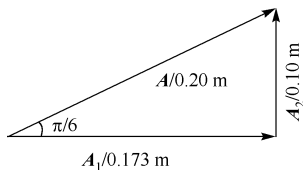


图 7.27 习题 7.26 图

两个振动的相位差。

分析:本题可用旋转矢量法直接求解。

解:利用旋转矢量法, 如图 7.27 所示。以第一个矢量 A_1 为参考方向, 因为已知第一个矢量的大小 $|A_1| = 0.173 \text{ m}$, 又知合矢量 A 的大小和方向, 即 $|A| = 0.2 \text{ m}$, 且与第一个简谐振动的

相位差为 $\pi/6$ ，则可得第二个矢量的大小为 $|A_2| = 0.1 \text{ m}$ ，并与第一个简谐振动的相位差为 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ 。

此题也可以用公式法进行计算，请同学们自己思考。

7.27 一物体做简谐振动，(1) 当它的位置在振幅的一半时，试利用旋转矢量计算它的相位可能为哪几个值？并作出这些旋转矢量；(2) 谐振子在这些位置时，其动能、势能各占总能量的百分比是多少？

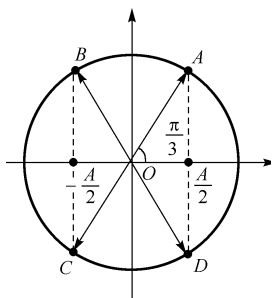


图 7.28 习题 7.27 图

分析：找出简谐振动物体振幅为 $\pm \frac{A}{2}$ 的位置即可。

解：(1) 旋转矢量的计算如图 7.28 所示。从图可见，简谐振动物体振幅为 $\pm \frac{A}{2}$ 的位置，其对应的相位可能为 $\pm \frac{\pi}{3}$ 和 $\pm \frac{2\pi}{3}$ 。

(2) 物体做简谐振动时的总能量为 $E = \frac{1}{2}kA^2$ ，谐振子的位置在振幅一半时的势能为 $E_p = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}kA^2$ ；动能为 $E_k = E - E_p = \frac{7}{8}kA^2$ ；所以，动能和势能各占总能量的百分比分别为 75% 和 25%。

(二) 波动部分

7.28 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，波动表达式为 $y = 0.10 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$

(SI 单位)，该波在 $t = 0.5 \text{ s}$ 时刻的波形图是 ()。

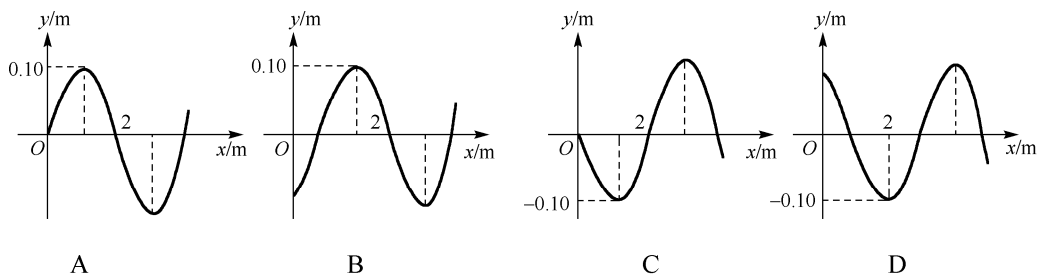


图 7.29 习题 7.28 图

分析与解：将 $t = 0.5 \text{ s}$ 代入波动方程得 $y = 0.10 \cos \left(-\frac{\pi}{2}x + \pi \right)$ ，利用五点法或平移法作

图可得波形为 B。所以正确答案选择 B。

7.29 横波以波速 u 沿 x 轴负方向传播。 t 时刻波形曲线如图 7.30(a) 所示。则该时刻 ()。

A. a 点振动速度大于零

B. b 点静止不动

C. c 点向下运动

D. d 点振动速度等于零

分析与解：波形图上 a 、 b 、 c 、 d 各点的运动方向可从波形向波的传播方向中推移来判

断。将波形向左作微小平移,如图 7.30(b)所示,由波形图可看出,波形图上 a 、 b 、 c 、 d 各振动质点位置的变化,其中 $v_a < 0$, $v_b < 0$, $v_c > 0$, $v_d = 0$, 所以,正确选项为 D。

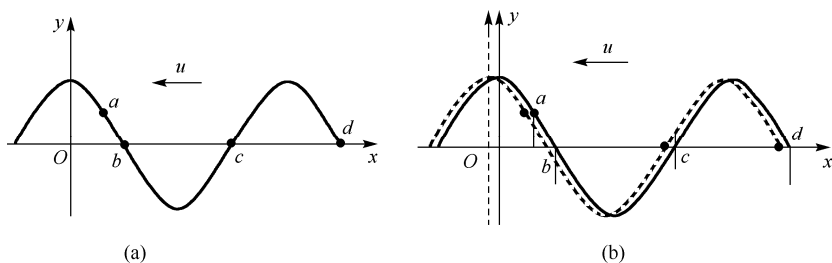


图 7.30 习题 7.29 图

7.30 若一平面简谐波的表达式为 $y = a \cos(bt - cx)$, 式中 a 、 b 、 c 为正值常量, 则 ()。

- A. 波速为 c B. 周期为 $1/b$ C. 波长为 $2\pi/c$ D. 角频率为 $2\pi/b$

分析与解: 将此波动方程与波动方程标准形式 $y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$ 相比较以确定各量值, 比较后可得振幅 $a = A$, 角频率 $\omega = b$; $\frac{2\pi}{uT} = \frac{2\pi}{\lambda} = c$, 波长 $\lambda = uT = \frac{2\pi}{c}$, 周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{b}$ 。由此可知, 正确选项为 C。

7.31 频率为 100 Hz, 传播速度为 300 m/s 的平面简谐波, 波线上距离小于波长的两点振动的相位差为 $\pi/3$, 则此两点相距 ()。

- A. 2.86 m B. 2.19 m C. 0.5 m D. 0.25 m

分析与解: 由已知平面简谐波的各量值 $\nu = 100$ Hz, $u = 300$ m/s 可得 $\lambda = \frac{u}{\nu} = 3$ m; 又由 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$, 可得 $\Delta x = 0.5$ m。故正确选项为 C。

7.32 一平面简谐波以速度 u 沿 x 轴正方向传播, 在 $t = t'$ 时波形曲线如图 7.31 所示。则坐标原点 O 的振动方程为 ()。

- A. $y = a \cos\left[\frac{u}{b}(t - t') + \frac{\pi}{2}\right]$ B. $y = a \cos\left[2\pi\frac{u}{b}(t - t') - \frac{\pi}{2}\right]$
C. $y = a \cos\left[\pi\frac{u}{b}(t + t') + \frac{\pi}{2}\right]$ D. $y = a \cos\left[\pi\frac{u}{b}(t - t') - \frac{\pi}{2}\right]$

分析与解: 由图分析可知该振动方程的振幅为 a , 波速为 u , 波长 $\lambda = 2b$, 由此可排除 A、B 选项。又由波形图可知在坐标原点处振动质点处于平衡位置且正向运动, 故 $\varphi_0 = -\pi/2$, 因此, 正确选项为 D。

7.33 如图 7.32 所示为一简谐波在 $t = 0$ 时刻的波形图, 波速 $u = 200$ m/s, $A = 0.1$ m, 则 P 处质点的振动速度表达式为 ()。

- A. $v = -0.2\pi \cos(2\pi t - \pi)$ B. $v = -0.2\pi \cos(\pi t - \pi)$

$$\text{C. } v = 0.2\pi \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{D. } v = 0.2\pi \cos\left(\pi t - \frac{3\pi}{2}\right)$$

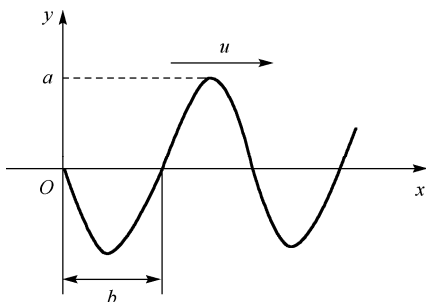


图 7.31 习题 7.32 图

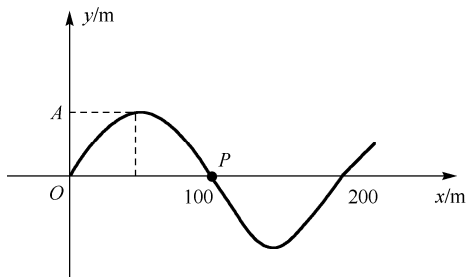


图 7.32 习题 7.33 图

分析与解: 由已知的波形图及题设 $u = 200 \text{ m/s}$ 、波长 $\lambda = 200 \text{ m}$ ，又由图可知在 $t = 0$ 时 P 处于平衡位置且做正向运动，故 $\varphi_0 = -\pi/2$ ，因此 P 点的振动方程为 $y = 0.1 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ ；其速度方程为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.2\pi \sin\left(2\pi t - \frac{1}{2}\pi\right) = -0.2\pi \cos(2\pi t - \pi)$$

所以答案选 A。

7.34 如图 7.33 所示，一平面简谐波沿 x 轴正向传播，已知 P 点的振动方程为 $y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ，则波的表达式为 ()。

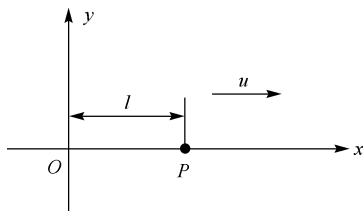


图 7.33 习题 7.34 图

$$\text{A. } y = A \cos\{\omega[t - (x - l)/u] + \varphi_0\}$$

$$\text{B. } y = A \cos\{\omega[t - (x/u)] + \varphi_0\}$$

$$\text{C. } y = A \cos \omega(t - x/u)$$

$$\text{D. } y = A \cos\{\omega[t + (x - l)/u] + \varphi_0\}$$

分析与解: 由已知 P 点的振动方程及描述振动的特征量求得 O 点的振动方程，就不难求得波动方程。由图可知，波沿 Ox 轴正向传播， P 点质元的振动从时间上比 O 点质元的振动落后 $\frac{l}{u}$ ，亦即当 t 时刻 P 点的初相为 φ_0 ，则 O 点的初相为 $\varphi_0 + \frac{\omega l}{u}$ 。因此， O 点的振动方程为

$$y_O = A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\omega l}{u}\right) = A \cos\left[\omega\left(t + \frac{l}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

波沿 Ox 轴正向传播，振动从原点传到 x 处的时间为 $\frac{x}{u}$ ，落后的相位为 $\omega \frac{x}{u}$ ，故波动方程为

$$y = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u} + \frac{l}{u}\right) + \varphi_0\right] = A \cos\left\{\omega\left[t - \left(\frac{x}{u} - \frac{l}{u}\right)\right] + \varphi_0\right\}$$

由此可知正确选项为 A。

7.35 如图 7.34 所示, S_1 和 S_2 为两相干波源, 它们的振动方向均垂直于纸面, 发出波长为 λ 的简谐波, P 点是两列波相遇区域中的一点, 已知 $\overline{S_1P} = 2\lambda$, $\overline{S_2P} = 2.2\lambda$, 两列波在 P 点发生相消干涉。若 S_1 的振动方程为 $y_1 = A\cos\left(2\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)$, 则 S_2 的振动方程为 ()。

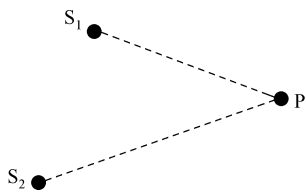


图 7.34 习题 7.35 图

- A. $y_2 = A\cos\left(2\pi t - \frac{1}{2}\pi\right)$ B. $y_2 = A\cos(2\pi t - \pi)$
 C. $y_2 = A\cos\left(2\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)$ D. $y_2 = A\cos(2\pi t - 0.1\pi)$

分析与解: 由于是两相干波源, 所以利用两相干波源发出的波产生干涉相消条件 $\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 再由 S_1 的振动方程, 可求出 S_2 的振动方程; 将 $r_2 - r_1 = 0.2\lambda$ 代入相消条件得: $\varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \times 0.2 = (2k+1)\pi$ 。因为 S_1 的初相 $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi_2 = 2k\pi - 0.1\pi$, 代入振动方程有 $y_2 = A\cos(2\pi t + 2k\pi - 0.1\pi) = A\cos(2\pi t - 0.1\pi)$, 故正确选项为 D。

7.36 沿着相反方向传播的两列相干波, 其表达式为 $y_1 = A\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)$ 和 $y_2 = A\cos 2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right)$ 。在叠加后形成的驻波中, 各处简谐振动的振幅是 ()。

- A. A B. $2A$ C. $2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ D. $\left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$

分析与解: 写出合成波的波动方程, 根据已知两列相干波方程可直接得到合成后的驻波方程, 继而得到各点做同频率简谐振动的振幅。两列传播方向相反的相干波叠加形成的驻波表示为: $y = \left[2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right]\cos\omega t$, 由于振幅 $A > 0$, 所以各处简谐振动的振幅为 $y = \left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$ 。

7.37 一平面简谐波(机械波)沿 x 轴正方向传播, 波动表达式为 $y = 0.2\cos\left(\pi t - \frac{1}{2}\pi x\right)$, 则在 $x = -3\text{ m}$ 处媒质质点的振动加速度 a 的表达式为_____。

分析与解: 由波动方程的物理意义知, 在坐标一定时, 那么位移就只是时间的周期函数, 此时方程表示给定坐标处质点在各个不同时刻的位移。因此该坐标的振动方程对时间求一阶导可得该质点振动的速度; 对振动方程时间求二阶导可得该质点振动的加速度。将 $x = -3\text{ m}$ 代入给定波动方程, 可得此点的振动方程为

$$y = 0.2\cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

该方程对时间求二阶导, 得

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -0.2\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

7.38 一列平面简谐波沿 x 轴正向无衰减地传播, 波的振幅为 $2 \times 10^{-3} \text{ m}$, 周期为 0.01 s , 波速为 $400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。当 $t = 0$ 时, x 轴原点处的质元正通过平衡位置向 y 轴正方向运动, 则该简谐波的表达式为_____。

分析与解: 由振幅 $A = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$, 周期 $T = 0.01 \text{ s}$ 。可得角频率 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 200\pi$, 波长 $\lambda = uT = 4 \text{ m}$ 。由 $t = 0$ 时原点 $x = 0$ 处质元向 y 轴正方向运动可知, 亦即 $t = 0$ 、 $x = 0$ 时, 有

$$v_0 = -\omega A \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x_0}{\lambda} + \varphi_0\right) > 0$$

得, 初相位 $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ 。故简谐波的表达式为

$$y = 2 \times 10^{-3} \cos\left(200\pi t - \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi\right)$$

7.39 一声纳装置向海水中发出超声波, 其波的表达式为 $y = 1.2 \times 10^{-3} \cos(3.14 \times 10^5 t - 220x)$, 则此波的频率 $\nu =$ _____, 波长 $\lambda =$ _____, 海水中声速 $u =$ _____。

分析与解: 此题已知波的表达式, 只要与波的标准表达式比较, 即可求出各相关量。将波的标准表达式 $y = A \cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] = A \cos\left[\left(\omega t \mp \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + \varphi\right]$ 与题中式子比较可得, 角频率 $\omega = 2\pi\nu = 3.14 \times 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 。所以, $\nu = 5 \times 10^4 \text{ Hz}$; 又由于 $\frac{2\pi}{\lambda} = 220$ 及 $u = \lambda\nu$, 故有 $\lambda = 2.86 \times 10^{-2} \text{ m}$, $u = \lambda\nu = 1.43 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

7.40 如图 7.35 所示, S_1 、 S_2 为振动频率、振动方向均相同的两个点波源, 振动方向垂直纸面, 两者相距 $\frac{3}{2}\lambda$ (λ 为波长)。已知 S_1 的初相为 $\frac{1}{2}\pi$ 。

(1) 若使射线 S_2C 上各点由两列波引起的振动均为干涉相消, 则 S_2 的初相应为_____。

(2) 若使 S_1 、 S_2 连线的中垂线 MN 上各点由两列波引起的振动均干涉相消, 则 S_2 的初位相应为_____。

分析与解: 应用两列波干涉相消条件求解。(1) 设 S_2C 沿 x 轴正向, 由题图知 S_2C 上振动干涉相消条件, $\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = (2k+1)\pi$, 考虑 $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\Delta x = \frac{3\lambda}{2}$, 则 S_2 的初相为 $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ 。

(2) 因两波源点到中垂线各点距离相等 $\Delta r = 0$, 即 $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$, 当 $k = 0$ 时, 则有 S_2 的初相位 $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ 。

7.41 如图 7.36 所示, 一平面简谐波沿 Ox 轴负方向传播, 波长为 λ , 若 P 处质点的振动方程是 $y_P = A\cos(2\pi\nu t + \pi/2)$, 则该波的表达式是_____ ; P 处质点_____时刻的振动状态与 O 处质点 t_1 时刻的振动状态相同。

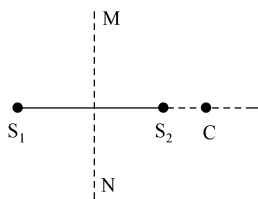


图 7.35 习题 7.40 图

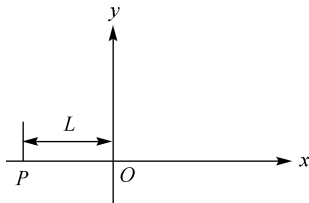


图 7.36 习题 7.41 图

分析与解: 由图可知, 当波沿 x 轴负方向传播时, 原点 O 超前于 P 点振动, 超前时间为 $\frac{L}{u} = \frac{L}{\lambda\nu}$, 故波的表达式为 $y = A\cos\left[2\pi\nu\left(t + \frac{x+L}{\lambda\nu}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$, P 处质点振动较 O 处质点 t_1 时刻的振动要滞后 L/u 时间, 考虑到周期性的情况, 那么 $t_2 = L/u + kT = L/\lambda\nu + k/\nu$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的所有时刻, P 处质点振动状态都与 O 处质点 t_1 时刻的振动状态相同。

7.42 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播, 波长为 λ 。若如图 7.37 所示, p_1 点处质点的振动方程为 $y_1 = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$, 则 p_2 点处质点的振动方程为_____ ; 与 p_1 点处质点振动状态相同的那些点的位置是_____。

分析与解: 由 p_1 点的振动方程, p_1 点到 p_2 点的距离及波的传播方向, 求出 p_2 点处质点振动滞后的相位, 即可求得 p_2 点处的振动方程; 再考虑到波传播的周期性, 由滞后相位加上 $k\lambda$, 即得到与 p_1 点处质点振动状态相同的那些点的位置。

由于波沿正方向传播, p_2 点的振动滞后于 p_1 点的振动, 滞后相位为 $2\pi(L_1 + L_2)/\lambda$ 。所以, p_2 点的振动方程为

$$y_2 = A\cos\left[2\pi\nu t + \varphi - \frac{2\pi}{\lambda}(L_1 + L_2)\right] = A\cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{L_1 + L_2}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

与 p_1 点振动状态相同的点满足 $\Delta x = x - x_{p_1} = k\lambda$, 故有

$$x = x_{p_1} + k\lambda = -L_1 + k\lambda \quad (k=1, 2, \dots)$$

7.43 一简谐波沿 x 轴正方向传播。 x_1 和 x_2 两点处的振动曲线分别如图 7.38(a)、(b)所示。已知 $x_2 > x_1$ 且 $x_2 - x_1 < \lambda$ (λ 为波长), 则 x_2 点的相位比 x_1 点的相位滞后_____。

分析与解: 波形图给出了 x_1 和 x_2 两点处的初相位, 根据波的传播方向及 $x_2 > x_1$ 设定, 可以判断 x_2 点处相位滞后 x_1 点处的相位。又由图可知, x_1 点初相 0 , x_2 点初相位 $\pi/2$, 相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$, 考虑 $x_2 - x_1 < \lambda$, 即有 x_2 点相位超前 x_1 点的相位 $\pi/2$, 或 x_2 点相位比 x_1 点的相位滞后 $3\pi/2$ 。

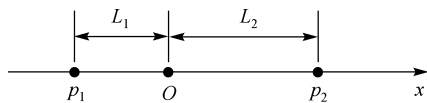


图 7.37 习题 7.42 图

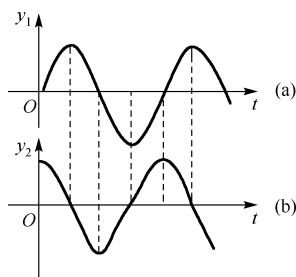


图 7.38 习题 7.43 图

7.44 在截面积为 S 的圆管中, 有一列平面简谐波在传播, 其波的表达式为 $y = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$, 管中波的平均能量密度是 \bar{w} , 则通过截面积 S 的平均能流是_____。

分析与解: 根据定义, 一个周期内通过与波的传播方向垂直的某个截面积 S 的能量, 为通过 S 的平均能流, 其值为 $\bar{P} = \bar{w}uS$, 而 $u = \lambda / T = \lambda v$, $v = \omega / 2\pi$, 所以代入得, 平均能流 $\bar{P} = \bar{w}uS = \frac{\omega\lambda}{2\pi} \bar{w}S$ 。

7.45 已知波动方程为 $y = 0.1 \cos \frac{\pi}{10}(25t - x)$, 其中 x 、 y 的单位为 m , t 的单位为 s 。

求: 波线上各质点在时间间隔 $t = 0.2 \text{ s}$ 的位相差。

分析: 本题实为由波动方程求波线上任意一点在一定时间间隔的相位差。

解: 由波动方程可知 $\omega = \frac{25}{10} \pi \text{ s}^{-1}$, 对于波线上任意一个给定点, 在时间间隔内的位相差为

$$\Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t$$

所以在 $\Delta t = 0.2 \text{ s}$ 时, 相位差为 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。

7.46 如图 7.39 所示, 一列平面简谐波在 $t = 0$ 时的波形如图中曲线 I 所示, 波沿 x 轴正方向传播, 经过 $t = 0.5 \text{ s}$ 后, 波形变为曲线 II, 已知波的周期 $T \geq 1 \text{ s}$ 。试由图中所给条件, 求: (1) 波动表达式; (2) A 点的振动表达式。

分析: 波形图给出了振幅、波长。根据波的传播方向, 可以判断参与波动的任意质元的初始位移和运动方向。根据这些已知条件可以确定任意一点的振动表达式, 进而求得波动表达式。

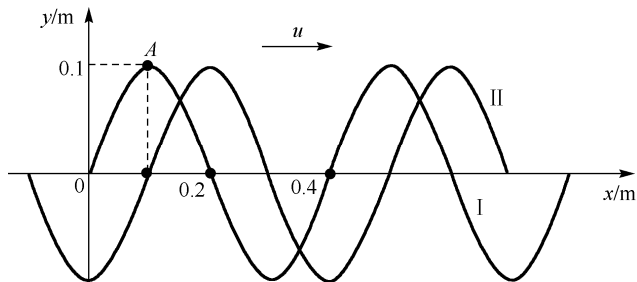


图 7.39 习题 7.46 图

解: (1) 由波形图可知, $A = 0.1 \text{ m}$, $\lambda = 0.4 \text{ m}$, 经过 $t = 0.5 \text{ s}$ 波向前传播了 0.1 m , 因此波速 $u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 圆频率 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} u = \pi \text{ s}^{-1}$ 。

此外,从波形曲线图可知,坐标原点处质元在 $t=0$ 时,位移 $y_0(0)=0$ 、速度 $v_0(0)<0$ (沿轴负方向,但值最大)。由此可以求得该处的相位是 $\varphi=\frac{\pi}{2}$,所以 $x=0$ 处质元的振动表达式为

$$y_0(t)=0.1\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

波动表达式

$$y(x,t)=0.1\cos\left[\pi(t-5x)+\frac{\pi}{2}\right]$$

式中 x 、 y 以m为单位, t 以s为单位。

(2) 将 $x=0.1$ m代入波动表达式,得质点A的振动表达式

$$y_A(t)=0.1\cos\left[\pi(t-5\times 0.1)+\frac{\pi}{2}\right]=0.1\cos\pi t$$

式中, y 以m为单位, t 以s为单位。

7.47 一横波沿绳子传播,其波动表达式为 $y=0.05\cos(100\pi t-2\pi x)$,求:

- (1) 此波的振幅、波速、频率和波长。
- (2) 绳子上各质点的最大振动速度和最大振动加速度。
- (3) $x_1=0.2$ m处和 $x_2=0.7$ m处两质点振动的相位差。

分析: 该题与波动的标准式比较,可得波动的振幅、波速、频率和波长等特征量;并由波动表达式对时间求一阶、二阶导数,求其极值,可得各质点的最大振动速度和最大振动加速度。

解: (1) 将 $y=0.05\cos(100\pi t-2\pi x)$ 与波动方程 $y=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0\right)$ 比较,可得

$$\text{振幅} \quad A=0.05 \text{ m}$$

$$\text{角频率} \quad \omega=2\pi\nu=100 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\text{波速} \quad u=\lambda\nu=50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

波长: 因为 $\frac{2\pi}{\lambda}=2\pi$, 所以 $\lambda=1$ m。

(2) 由波动方程对时间求偏导,得绳子上各质点的最大振动速度

$$v_m=\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\max}=\omega A=0.05\times 100\pi=15.7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

最大振动加速度

$$a=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{\max}=|-\omega^2 Ay|_{\max}=(2\pi\nu)^2 A=4.93\times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(3) 将 $x_1 = 0.2 \text{ m}$ 和 $x_2 = 0.7 \text{ m}$ 代入波动方程, 可求 t 时刻两点的相位差

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2\pi \times \frac{0.7 - 0.2}{1.0} = \pi$$

在 $x_1 = 0.2$ 和 $x_2 = 0.7$ 两位置质点振动相位相反。

7.48 如图 7.40 所示, 同一介质中有两个相干波源 S_1 、 S_2 , 振幅皆为 $A = 33 \text{ cm}$ 。当 S_1 点为波峰时, S_2 正好为波谷, 介质中波速 $u = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。欲使两列波在 P 点干涉后得到加强, 这两列波的最小频率为多大?

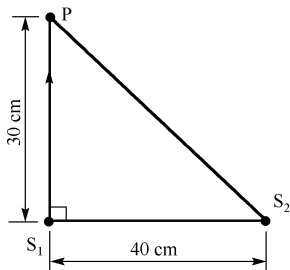


图 7.40 习题 7.48 图

分析: 在 P 点应用相干加强条件, 考虑 $\overline{S_1P} = r_1$, $\overline{S_2P} = r_2$, 可求得两相干波波长; 再应用介质中波速与波长关系可求得波源振动频率。

解: 由题图可知, $\overline{S_1P} = r_1 = 30 \text{ cm}$, $\overline{S_2P} = r_2 = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ cm}$, 要使从 S_1 、 S_2 两个波源发出的波在 P 点干涉后得到加强, 其相位差必须满足

$$\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda} \right) = \pm 2k\pi, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

由题意知, 波源 S_1 、 S_2 相位相反, 即 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ 。而 $r_2 - r_1 = 50 - 30 = 20 \text{ cm}$, 代入上式得

$$\varphi_2 - \frac{40}{\lambda} = \pm 2k\pi$$

即有 $\lambda = \frac{40}{1 + 2k}$ 。当 $k = 0$ 时, λ 为最大值, 即 $\lambda_{\max} = \frac{40}{1 + 2k} \Big|_{k=0} = 40 \text{ cm}$, 故这两列波的最小频率为

$$\nu_{\min} = \frac{u}{\lambda_{\max}} = \frac{100}{0.4} = 250 \text{ Hz}$$

7.49 如图 7.41 所示为一平面简谐波在 $t = 0$ 时刻的波形图, 求: (1) 该波的波动表达式; (2) P 处质点的振动方程。

分析: 由波形可以确定简谐波的振幅、波长、频率等特征量, 从而得到波动方程; 又由 P 点所处位置, 计算出 P 点振动滞后的相位, 从而得到该点的振动方程。

解: (1) 由波形图可知, 该平面简谐波的振幅

$A = 0.04 \text{ m}$ 、波长 $\lambda = 0.4 \text{ m}$ 、频率 $\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{0.08}{0.4} = 0.2$ 。由于在 $t = 0$ 时刻, 原点 $x = 0$ 处质

点处于平衡位置且向正向运动, 可得初相 $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ 。故该波的波动表达式为

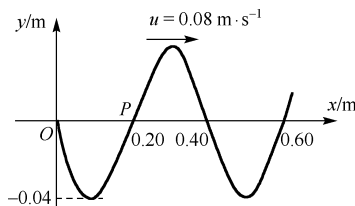


图 7.41 习题 7.49 图

$$y = 0.04 \cos \left[0.4\pi \left(t \mp \frac{x}{0.4} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

(2) 由于 $P = 0.2 \text{ m}$, 代入波动方程即可得 P 点的振动方程为

$$y = 0.04 \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{5} - \frac{0.2}{0.4} \right) - \frac{\pi}{2} \right] = 0.04 \cos \left(0.4\pi t - \frac{3\pi}{2} \right)$$

7.50 如图 7.42 所示, 一平面简谐波以 $400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的波速在均匀媒质中沿 x 轴正向传播。已知波源在 O 点, 波源的振动周期为 0.01 s , 振幅为 0.01 m 。设以波源振动过平衡位置向 y 轴正向运动时作为计时起点, 求: (1) B 和 A 两点间的振动相位差; (2) 以 B 为坐标原点写出波动方程。

分析: 可由题中给出的周期、波速求出波长, 再由 B 和 A 两点间的位置可求出相位; 又由波源振动的初始条件, 考虑 B 比 O 相位滞后, 可得 B 点振动的初相, 从而可求得以 B 为坐标原点的波动方程。

解: (1) 由题设已知条件可得, 波长、 B 和 A 两点间振动的相位差, 即

$$\lambda = Tu = 0.01 \times 400 = 4 \text{ m}$$

$$\Delta\varphi = -2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = -2\pi \frac{2-1}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

(2) 波源振动的初始条件为

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

则波源振动的初相位 $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$, B 比 O 相位滞后 $2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \times \frac{2}{4} = \pi$ 。因而 B 点振动的初相位是 $-\frac{3\pi}{2}$, 以 B 点为坐标原点的波动方程为

$$y = 0.01 \cos \left[200\pi \left(t - \frac{x}{400} \right) - \frac{3\pi}{2} \right]$$

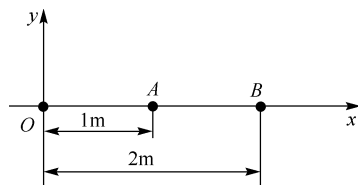


图 7.42 习题 7.50 图

7.51 平面简谐波沿 x 轴正方向传播, 振幅为 2 cm , 频率为 50 Hz , 波速为 $200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。在 $t = 0$ 时, $x = 0$ 处的质点正在平衡位置向 y 轴正方向运动, 求 $x = 4 \text{ m}$ 处媒质质点振动的表达式及该点在 $t = 2 \text{ s}$ 时的振动速度。

分析: 由题可知平面谐波的振幅、频率、波速, 且知 $t = 0$ 时, 在 $x = 0$ 处的质点的运动方向, 从而可求得平面谐波的波动方程, 继而可求得 $x = 4 \text{ m}$ 处媒质质点振动表达式, 及在 $t = 2 \text{ s}$ 时该质点的振动速度。

解: 由题意可得 $A = 0.02 \text{ m}$, $\omega = 2\pi\nu = 100\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\lambda = \frac{u}{\nu} = 4 \text{ m}$ 。又由于 $t = 0$ 时质点在平衡位置向 y 轴正方向运动, 所以初相 $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$, 故该平面简谐波的波动方程为

$$y = 0.02 \cos \left[100\pi \left(t - \frac{1}{200}x \right) - \frac{1}{2}\pi \right]$$

将 $x = 4 \text{ m}$ 代入上面波动方程, 可得振动方程

$$y = 0.02 \cos \left(100\pi t - \frac{1}{2}\pi \right)$$

在 $t = 2 \text{ s}$ 时, 质点的振动速度为

$$v = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=2} = -2\pi \sin \left(100\pi t - \frac{1}{2}\pi \right) = -2\pi \sin \left(100\pi \times 2 - \frac{1}{2}\pi \right) = 6.28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

7.52 如图 7.43 所示, 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播, BC 为波密媒质的反射面。波由 P 点反射, $\overline{OP} = \frac{3\lambda}{4}$, $\overline{DP} = \frac{\lambda}{6}$ 。在 $t = 0$ 时, O 处质点的振动恰好经过平衡位置向负方向运动。求 D 点处入射波与反射波的合振动方程。(设入射波和反射波的振幅皆为 A , 圆频率为 ω 。)

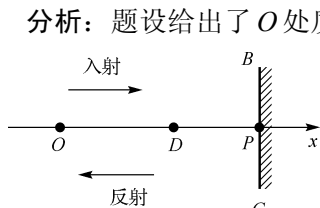


图 7.43 习题 7.52 图

分析: 题设给出了 O 处质点振动的初始条件, 由此可以写出入射波表达式; 由入射波表达式, 并根据波由波疏介质到波密介质的反射有半波损失, 可写出反射波的表达式, 两列波的叠加形成驻波, 由驻波表达式可以得到 D 点的振动表达式。

解: 根据题意, 在 $t = 0$ 时, O 处质点的位移为零, 且向负方向运动, 由此可确定 O 处质点的初相位为 $\pi/2$, 这样 O 处质点的振动表达式为

$$y_O(t) = A \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

入射波的波动表达式

$$y_{\text{in}}(x, t) = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{2} \right)$$

入射波在 P 点引起的振动表达式

$$y_{\text{in}P}(t) = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos(\omega t - \pi)$$

波是从波疏介质到波密介质的反射, 反射点有半波损失, 则反射波在 P 点的振动表达式为

$$y_{\text{re}P}(t) = A \cos(\omega t - \pi + \pi) = A \cos(\omega t)$$

所以, 反射波的波动表达式为

$$\begin{aligned} y_{\text{re}}(x, t) &= A \cos \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{3\lambda}{4} - x \right) \right] = A \cos \left[\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{3}{2}\pi \right] \\ &= A \cos \left[\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

入射波与反射波叠加后形成驻波的波动表达式为

$$y = y_{\text{in}} + y_{\text{re}} = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

位于 $x = \frac{3\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} = \frac{7\lambda}{12}$ 的 D 点, 其合振动表达式为

$$\begin{aligned} y_D(t) &= 2A \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{7\lambda}{12} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = 2A \cos \left(\frac{7\lambda}{6} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} A \sin \omega t \end{aligned}$$

7.53 电磁波的传播速率为 $3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 一电磁波源以 5 kW 的功率发射电磁波, 求距波源 50 km 处电磁波的强度和平均能量密度。

分析: 按照波的强度的定义, 波的强度是指单位时间通过与波的传播方向垂直的单位面积的平均能量。单位体积的波动的能量在一个周期内的平均值, 称为平均能量密度。

解: 电磁波在 4π 立体角中传播能量, 所以电磁波在距波源 50 km 处的强度为

$$I = \bar{w}u = \frac{\bar{P}}{S} = \frac{\bar{P}}{4\pi d^2} = 1.59 \times 10^{-7} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{I}{c} = 5.30 \times 10^{-16} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

第8章 光学* 波动光学

光学是物理学中发展较早的一个分支学科，是物理学的重要组成部分。光学主要包括几何光学、波动光学、量子光学。以光的波动性为基础的物理光学称为波动光学，其主要内容包括光的干涉、衍射和偏振。

19 世纪初，人们发现光有干涉、衍射和偏振等现象，这些现象是波动的特征，与微粒说不相容。1801 年英国物理学家托马斯·杨 (T.Young, 1773—1829) 首先利用双缝实验证明了光的干涉现象，并第一次成功地测定了光的波长。后来，1862 年，傅科 (J.H.Foucault) 又用实验方法测定了水中的光速，证实水中的光速小于空气中的光速，这些事实为光的波动说提供了重要的实验证据。19 世纪 60 年代，麦克斯韦 (J.C.Maxwell, 1831—1879) 根据其电磁场理论的 4 个基本方程，预言了“电磁波”的存在，并认为光就是一种电磁波。德国物理学家赫兹 (H.R.Hertz, 1857—1894) 于 1888 年用实验证实了电磁波的存在，并证明电磁波与光一样能产生反射、折射、干涉、偏振等现象，光和电磁现象的一致性再次证明了自然现象是存在相互联系的。但是，自 19 世纪末到 20 世纪初，爱因斯坦等科学家又发现了光电效应现象，这一现象不能用波动理论来解释，必须假定光是具有一定能量和动量的粒子所组成的粒子流，这种粒子称为光子。从而，人们认识到光具有波动和粒子的两重性质。

光的干涉和衍射现象表明光具有波动性，但不能说明光是纵波还是横波。在光的电磁理论建立之前，在杨氏双缝实验成功以后不久，马吕斯 (E.I.Malus) 于 1809 年就在实验中发现了光的偏振现象，表明光的横波性。电磁理论和实验事实指出，在自由空间传播的光波是一种横波，光波中沿垂直于传播方向振动着的物理量是电场矢量和磁场矢量，在光和物质的相互作用过程中主要是光波的电矢量 E 起作用，常以电矢量 E 作为光波中振动矢量的代表。

本章简要介绍了几何光学知识，通过光的干涉、衍射、偏振等一般现象来研究波动的重要特征，光的粒子性安排在后面的章节研究。

8.1 学习要求

1. *几何光学

- (1) 掌握几何光学中的三条基本定律；
- (2) 掌握平面反射和平面折射、球面反射和球面折射成像的基本规律，并会分析和计算一般的光反射和折射问题；
- (3) 掌握透镜成像的基本规律，能够绘制一般透镜成像的光路图。

2. 波动光学

(1) 光的干涉

① 理解光源的发光机制,明确两个普通光源是不相干的;了解光的相干条件及获得相干光的方法。

② 掌握光程及光程差的概念,掌握其计算方法;能够运用光程差的概念来分析干涉现象的相关问题;并能够判断在某些具体情况下是否存在半波损失;掌握半波损失的概念及产生条件。

③ 掌握几种典型的干涉实验(杨氏双缝干涉、劳埃德镜干涉)的基本装置及干涉条纹的分布特征、条纹位置的计算和一些科研的实际应用。

④ 了解迈克耳孙干涉仪的基本结构、工作原理及其应用;了解光学精密测量的基本方法。

(2) 光的衍射

① 理解光的衍射现象,掌握惠更斯-菲涅耳原理;掌握夫琅禾费单缝衍射规律。

② 掌握光栅衍射的原理及衍射条纹的成因,能正确理解光栅方程。

③ 了解光栅衍射的暗纹与明纹分布规律,能够分析和确定谱线位置。

④ 正确理解光的干涉和衍射的区别及联系。

(3) 光的偏振

① 理解自然光、偏振光、部分偏振光、起偏、检偏等概念。

② 掌握马吕斯定律。

③ 理解反射和折射时光的偏振现象,掌握布儒斯特定律。

④ 了解双折射现象。

8.2 内容提要

1. 基本概念

(1) 几何光学的三条基本定律

① 光的直线传播定律:光在均匀介质中沿直线传播。

② 光的反射定律:反射光线总是位于入射面内,并且与入射光线分居法线两侧;入射角 i 等于反射角 i' ,其数学表达式为

$$i = i' \quad (8-1)$$

③ 光的折射定律:折射光线总是位于入射面内,并且与入射光线分居法线两侧;入射角 i 的正弦与折射角 r 的正弦之比为常数,数学表达式为

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21} \quad (8-2)$$

式中 n_{21} 为第二种介质对第一种介质的相对折射率。

(2) 平面反射和平面折射的成像规律

① 物体在平面镜反射中所成的虚像与物体本身的大小相等,并且物与像对称于平面镜。

② 物体在平面折射中成虚像,其视深为

$$y' = \frac{n_2}{n_1} y \quad (y \text{ 为物体的实际深度}) \quad (8-3)$$

(3) 球面反射的成像规律

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \quad (f = R/2) \quad (8-4)$$

式中 p 为物距, p' 为像距, f 为焦距, R 为球面镜的曲率半径。

② 球面镜反射物像关系中的符号法则: 物点 P 在镜前时呈实物, 物距 p 为正; 物点 P 在镜前时呈虚物, 物距 p 为负; 像点 P' 在镜前时呈实像, 像距 p' 为正; 像点 P' 在镜后时呈虚像, 像距 p' 为负, 归纳为实正虚负。凹面镜的曲率半径 R 取正, 凸面镜的曲率半径 R 取负。

③ 球面镜的横向放大率

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{p'}{p} \quad (8-5)$$

式中, y 为物体的高度, y' 为像的高度, 当 $m < 0$ 时, 成倒立像; 当 $m > 0$ 时, 成正立像。

(4) 球面折射成像规律

① 球面折射成像公式

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (8-6)$$

式中, n_1 和 n_2 为两种不同介质的折射率。

② 球面折射成像的横向放大率

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 p'}{n_2 p} \quad (8-7)$$

③ 球面镜折射成像的符号法则为“实正虚负”; 规定当物体面对凸面时, 曲率半径 R 为正; 当物体面对凹面时, 曲率半径 R 为负; 当 $m < 0$ 时, 成倒立像; 当 $m > 0$ 时, 成正立像。

(5) 薄透镜成像规律

$$\textcircled{1} \text{ 薄透镜成像公式} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \quad (8-8)$$

$$\textcircled{2} \text{ 薄透镜的焦距} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (8-9)$$

$$\textcircled{3} \text{ 空气中薄透镜的焦距} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (8-10)$$

式中, $\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) > 0$ 的透镜为凸透镜, $\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) < 0$ 的透镜为凹透镜。

④ 薄透镜的横向放大率
$$m = -\frac{p'}{p} \quad (8-11)$$

(6) 相干光和相干光的获得

① 相干光：一般光源不能产生干涉现象，把能产生相干叠加的两束光称为相干光，相干叠加必须满足振动频率相同、方向相同、相位差恒定的条件。两束相干光在交叠的区域里可看到干涉条纹。

② 从普通光源获得相干光的方法有两种：一种是分波阵面法，如杨氏实验、劳埃德镜实验；另一种是分振幅法，如薄膜干涉、等倾干涉、劈尖干涉、牛顿环等。

分波阵面法：用单色光照射狭缝 S ， S 可视为单色线光源。 S_1 、 S_2 为与 S 平行等距的狭缝。从 S_1 、 S_2 发出的光是从 S 的同一波阵面分出的两束光，因而是相干光。从波阵面上分离出两部分或更多部分作为初相相同的相干光源，使之产生干涉，如图 8.1(a)所示。杨氏实验、劳埃德镜实验属于这类情况。

分振幅法：利用光束 1 入射至薄膜上表面，分成两部分，一部分由上表面反射形成光束 2，另一部分折射进入薄膜，在其下表面又被反射，再通过上表面折射出来，形成光束 3。反射光束 2、光束 3 是由光束 1 分出来的，所以是相干光，如图 8.1(b)所示。薄膜干涉实验属于此类。

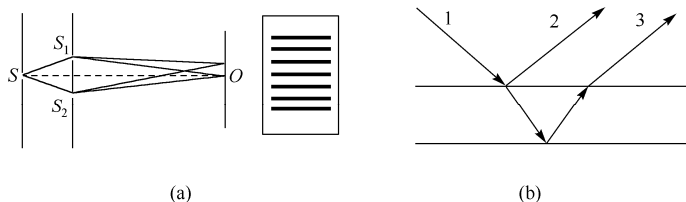


图 8.1 (a) 分波阵面法; (b) 分振幅法

(7) 光程、光程差：若光在折射率为 n 的均匀介质中传播，通过的几何路程为 l ，则把 $L = nl$ 称为光程。两束相干光的光程之差称为光程差。两束相干光的相位差为

$$\phi_2 = \left(\omega t + \phi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda_1} \right) - \left(\omega t + \phi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda_2} \right) = 2\pi \frac{r_2}{\lambda_2} - 2\pi \frac{r_1}{\lambda_1} \quad (8-12)$$

光程差 $\Delta = n_2 l_2 - n_1 l_1$ 与相位差 $\Delta\phi = \phi_2$ 的关系为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \quad (8-13)$$

(8) 半波损失：光学中将光从光疏（折射率小的）介质射向光密（折射率大的）介质，并在界面上反射时，反射波发生相位 π 的突变的现象称为半波损失。因而，在计算光程时，凡有半波损失的光波，都加上 $\lambda/2$ 的光程，即相当于多走了半个波长。

(9) 光的衍射现象：光波遇到障碍物时，它能绕过障碍物的边缘前进。这种光偏离直线传播的现象叫做光的衍射。衍射和干涉一样也是波动的重要特征之一。

(10) 衍射光栅：由平行等宽等间隔的多狭缝构成的衍射屏称为衍射光栅。设衍射光栅的总缝数为 N ，缝宽为 a ，缝间不透光部分宽度为 b ， $(a+b)$ 称为光栅常数。当平行单

色光垂直入射到光栅上,衍射光束通过透镜会聚在透镜的焦平面上,且在屏上几乎黑暗的背景上呈现出一系列又细又亮的明条纹,这种现象称为光栅的衍射。

(11) 惠更斯-菲涅耳原理: 给定波阵面 S 上每一面元 dS 发出的子波, 在波阵面前方某点 P 所引起的光振动的振幅大小与面积 dS 成正比, 与面元到 P 点的距离 r 成反比, 并且随面元法线与 r 间的夹角 θ 增大而减小, P 点处的光强为整个波阵面上所有面元发出的子波在 P 点引起的光振动的总和。

衍射现象中出现的明暗条纹, 正是从同一波阵面上发出的各子波相互干涉的结果。

(12) 光的偏振: 在与光的传播方向垂直的平面内, \mathbf{E} 矢量振动沿各个方向均相等的光为自然光; 而只在某一固定方向有 \mathbf{E} 矢量振动的光为线偏振光, 简称偏振光。介于两者之间的为部分偏振光。

2. 光的干涉

(1) 干涉明暗条纹的条件

$$\Delta = \begin{cases} \pm k\lambda, & k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{明纹中心} \\ \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{暗纹中心} \end{cases} \quad (8-14)$$

注意: 必须根据具体干涉装置来选择正、负号及 k 的数值, k 并非都从零开始。处理光的干涉问题时, 应先分析计算具体问题中相干光的光程差(注意有无半波损失), 列出干涉明暗的具体条件, 进而讨论干涉条纹分布规律。

(2) 杨氏双缝干涉

如图 8.2 所示, 由 S_1 、 S_2 发出的光经 r_1 、 r_2 到接收屏上 P 点的光程差是 $\Delta \approx r_2 - r_1 \approx d \sin \theta$ 。式中 θ 是 P 点的角位置, 即 $S_1 S_2$ 的中垂线 MO 与 MP 之间的夹角, 在杨氏双缝干涉中, θ 很小, 因而 $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$, 所以这两束光的光程差近似地表示为

$$\Delta \approx r_2 - r_1 \approx d \sin \theta \approx d \tan \theta = \frac{xd}{D}$$

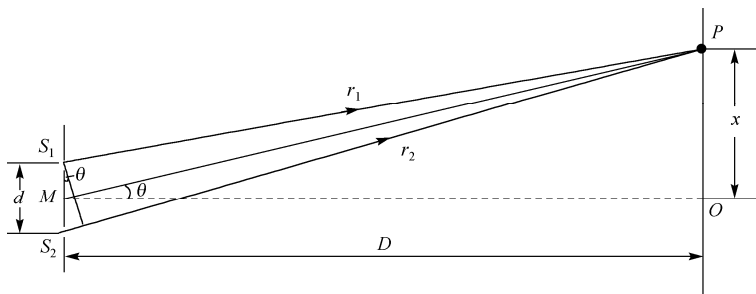


图 8.2 杨氏双缝干涉

所以,

$$\Delta = \begin{cases} \pm k\lambda, & k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{明纹中心} \\ \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{暗纹中心} \end{cases}$$

故, 明纹中心位置为

$$x = \pm k \frac{D}{d} \lambda \quad (8-15)$$

当 $k=0$ 时, 对应中央明纹; 当 $k=1$ 时, 则对应上、下两侧第一级明纹。

暗纹中心位置为

$$x = \pm (2k+1) \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2} \quad (8-16)$$

当 $k=0$ 时, 对应上、下两侧第一级暗纹; 当 $k=1$ 时, 对应第二级暗纹……

两相邻明纹(或暗纹)中心之间的距离为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D\lambda}{d} \quad (8-17)$$

讨论见例 8-4。

(3) 劳埃德镜实验

原理如图 8.3 所示。该实验装置是由一狭缝光源 S_1 发出的光波直接射到屏上和由虚光源 S_2 发出的光波掠射到玻璃板 MN 上, 再经玻璃反射到达屏上, S_1 和 S_2 构成一对相干光源, 对干涉条纹的分析与杨氏实验相同。

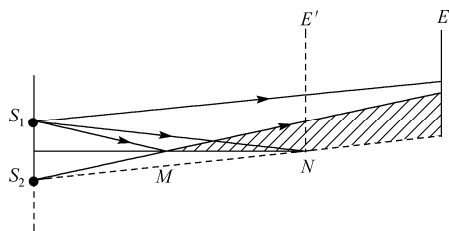


图 8.3 劳埃德镜实验原理图

(4) 薄膜干涉

薄膜干涉获得相干光的方法属于分振幅法, 其原理如图 8.4 所示。由单色光源 S 上一点发出的光线在薄膜上、下两界面上分别反射形成的光束 2 和光束 3 两束平行光, 经透镜 L 后会聚于 P 点。由于光束 2 和光束 3 是相干光, 所以在 P 点会产生干涉现象。另一方面, 光束 2 和光束 3 的能量是由光束 1 分出来的, 由于光的能量与振幅有关, 所以这种产生相干光的方法属于分振幅法。

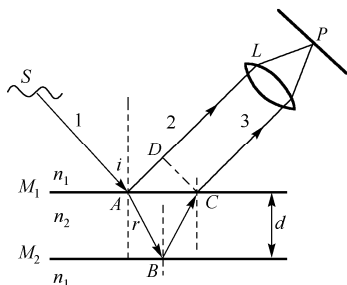


图 8.4 薄膜干涉获得相干光的原理

在 P 点干涉的加强与减弱取决于它们的光程差, 注意计算光程差时考虑有无半波损失, 如图 8.4 所示的光程差为

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & k=1,2,\dots \text{ 明纹中心} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\dots \text{ 暗纹中心} \end{cases} \quad (8-18)$$

当光垂直入射时 ($i=0$) 有

$$\Delta = 2n_2d + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & k=1,2,\dots \text{ 明纹中心} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\dots \text{ 暗纹中心} \end{cases} \quad (8-19)$$

注意以下几点: ① 式(8-18)由 $\Delta = n_2(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1\overline{AD} + \frac{\lambda}{2}$ 及折射定律 $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ 计算而得; ② 光程差公式取正值, 该公式不必死记硬背, 可根据具体干涉装置求光程。

(5) *劈尖干涉

如图 8.5 所示, 两平行玻璃片构成一劈尖, 如用平行光照射, 则相干光束①、②将在劈尖的上表面产生干涉条纹。明纹、暗纹的条件为 (相位跃变发生在劈的下表面)

$$\Delta = 2n_2e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda, & k=1,2,\dots \text{ 明纹} \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2,\dots \text{ 暗纹} \end{cases} \quad (8-20)$$

明纹条件中 k 的起始值不能取零, 因为 $k=0$, 则 $e < 0$, 厚度为负值, 无意义, 干涉条件是平行于棱边的等间距直条纹, 如图 8.5(b)所示, 这种情况下棱边处 ($e=0$) 为暗纹。

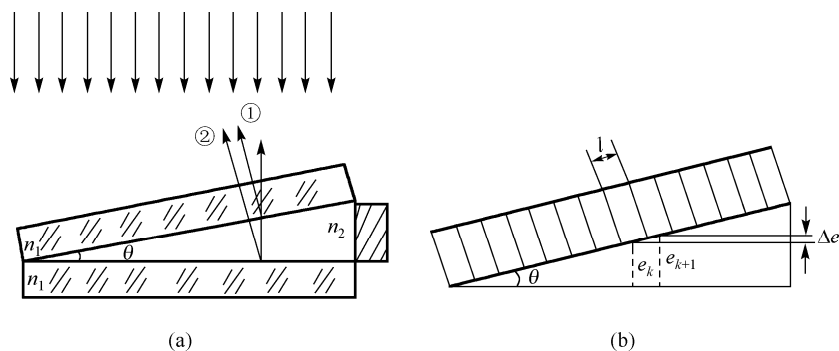


图 8.5 劈尖的干涉

由式 (8.20) 明纹或暗纹条件, 可求得两相邻明纹或暗纹处劈尖的厚度差为

$$\Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n_2} \quad (8-21)$$

故两相邻明纹或暗纹距离为

$$l = \frac{\lambda}{2n_2 \sin \theta} \quad (8-22)$$

式(8-22)中右边等式是考虑了通常 θ 很小,由 $\sin\theta\approx\theta$ 而得。条纹间距与劈尖 θ 有关,增大 θ ,条纹向棱边移动,条纹间距变小,条纹变密。当 θ 增大到一定程度后,条纹就密不可分了,所以干涉条纹只能在劈尖角度很小时才能观察到。

(6) *牛顿环

如图8.6所示为牛顿环装置,干涉条纹是以接触点为中心的同心圆环。图中平凸镜的曲率半径 R 、牛顿环的半径 r 与厚度 d 的关系是

$$r^2 = 2Rd \quad (8-23)$$

干涉条纹的明环半径为

$$r = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{R\lambda}{n_2}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8-24)$$

暗环半径为

$$r = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n_2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8-25)$$

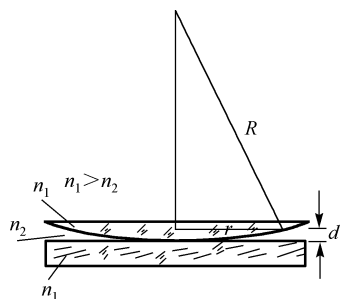


图 8.6 牛顿环装置示意图

3. 光的衍射

(1) 夫琅禾费单缝衍射

用单色平行光垂直入射在单缝上,在单缝后面放置一透镜,在透镜的焦平面上再放置一屏幕,则在屏幕上可以看到在中央明纹两侧对称地分布着明暗相间的各级条纹。

用半波带法可以直观形象地解释单缝衍射条纹分布的原理。如图8.7所示,单缝各点发出的子波在衍射角为 θ 方向的最大光程差为 $AC = a \sin\theta$ 。把 AC 分成间隔为半波长($\lambda/2$)的 N 个相等部分,作 $N-1$ 个平行于 BC 的平面,这些平面将把单缝上的波阵面切割成 N 个半波带。这样,相邻两波带上对应的点发出的子波的光程差总是 $\lambda/2$,它们到达 P 点时相互干涉抵消。可见,当 N 为偶数时,所有波带将成对地相互抵消,使点 P 出现暗纹;当 N 为奇数时,成对的波带抵消后还留下一个波带的作用,使点 P 出现明纹,若 N 不是整数,点 P 介于明暗之间,即

$$a \sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad P \text{ 点是暗纹中心} \quad (8-26)$$

$$a \sin\theta = \pm (2k+1)\lambda/2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad P \text{ 点是明纹中心} \quad (8-27)$$

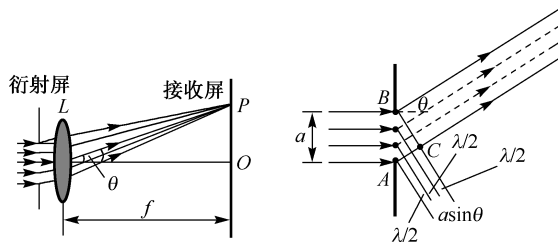


图 8.7 半波带法解释单缝衍射条纹分布的原理图

当 $\theta = 0$ 时, 各衍射光光程差为零, 通过透镜后会聚在透镜的焦平面上, 这就是中央明纹的中心位置, 该处的光强最大。衍射角不同, 单缝处波阵面分出的半波带个数不同。而且 AB 一般也不能恰巧分成整数个半波带, 此时衍射光束形成介于最明和最暗的中间区域。

由式 (8-26) 可知, 当 $k=1$, $-\lambda < a \sin \theta < \lambda$ 时, 即为中央明纹区域。考虑到一般情况中的 θ 较小, 所以中央明纹的半角宽度为

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda}{a}$$

式 (8-26) 中第 k 级与第 $k+1$ 级暗纹之间的角距离为第 k 级明纹的角宽度

$$\Delta \theta = \theta_{k+1} - \theta_k \approx \sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k = \frac{\lambda}{a} \quad (8-28)$$

对于任意的其他衍射角 θ , AB 一般不会恰巧分成整数个半波带, 此时, 衍射光束形成介于最明和最暗的中间区域。单缝衍射条纹中, 光强分布并不是均匀的, 相对光强分布如图 8.8 所示。

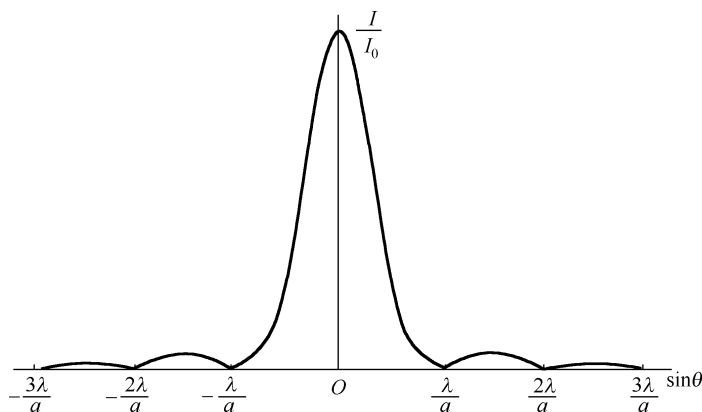


图 8.8 夫琅禾费单缝衍射条纹的光强分布

θ 较小时, 中央明纹的宽度是其他明条纹宽度的两倍, 即中央明纹的半角宽度等于其他明纹的角宽度。

(2) 夫琅禾费圆孔衍射与光学仪器的分辨率

将单缝衍射屏换为圆孔衍射屏, 接收屏上将得到夫琅禾费圆孔衍射图样。夫琅禾费圆孔衍射有助于分析光学成像系统的成像质量。

圆孔的零级衍射斑称为艾里斑, 其中心是几何光学像中心。衍射光角分布的弥散程度可用艾里斑的半角宽度表示, 对于直径为 D 的圆孔夫琅禾费衍射, 艾里斑的半角宽度为衍射斑中心到第一级极小的角距离, 第一级极小的角位置为

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (8-29)$$

当 θ 很小时, 艾里斑的半角宽度为

$$\delta\theta \approx \sin\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (8-30a)$$

最小分辨角（瑞利判据）：当一个艾里斑的中心刚好落在另一个艾里斑的边缘时，就认为两个像刚好能够分辨，把此时的艾里斑的半角宽度称为最小分辨角，即

$$\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

按此规定可求出两物点的距离并将其作为光学仪器能分辨的两物点的最小距离，以圆孔形物镜为例，恰能分辨两点光源 S_1 和 S_2 的两衍射图样中心之间的距离，应等于艾里斑的半径。此时 S_1 和 S_2 对仪器透镜光心的张角（见图 8.9）为

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (8-30b)$$

式中， λ 是波长， D 是透光孔径。可见，对于无限远物点成像的圆孔光学系统，其孔径越大，所能分辨开的两物点的角距离越小，即分辨能力越强；所用的光的波长越短，分辨能力越强。

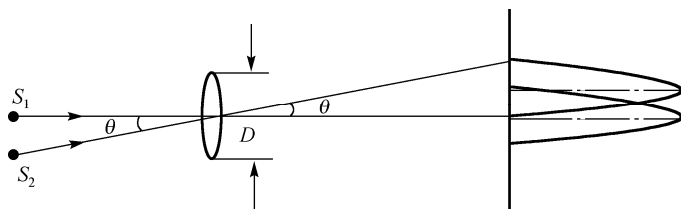


图 8.9 最小分辨角

在光学中，常将光学仪器的最小分辨角的倒数称为仪器的分辨率，即分辨率为 $1/\theta$ 。

(3) 光栅衍射

光栅的每一狭缝可以看作是缝宽为 a 的单缝衍射，其中每一个单缝衍射的衍射图样是重合的；若把每一狭缝看作一个整体，总缝数为 N 的衍射光栅又相当于 N 条光束的干涉。因而，光栅的衍射条纹应看作单缝衍射与 N 条光束干涉的总效果。

若衍射角为 θ ，相邻两缝衍射光的光程差为 $\Delta = (a+b)\sin\theta$ ，各条缝的衍射光经透镜 L_2 会聚于 p 点，如图 8.10 所示，则 p 点的光振动是 N 个同方向、同频率、同振幅、相邻缝的光程差为 Δ 的光振动的合成。若相邻缝的光程差等于波长的整数倍时， p 点合振幅为单缝振幅的 N 倍，由此得到 p 点为明纹的条件，即满足

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8-31)$$

时，光栅上的光束在 p 点相互加强呈现明纹，把 p 点对应的明纹称为主极大。决定主极大的方程式 (8-31) 就是光栅方程。式中， $k=0$ 的条纹称为中央明纹， $k=1, 2, \dots$ 的明纹分别是第一级明纹、第二级明纹……正负号表示各级明纹对称分布在中央明纹两侧。

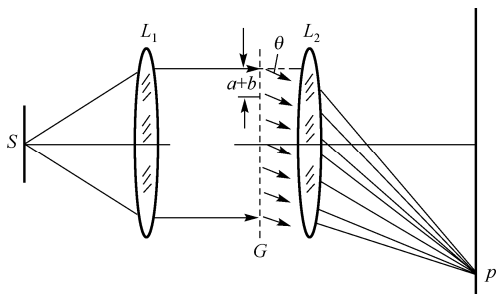


图 8.10 光栅衍射

光栅衍射的暗纹与次明纹分析：若 N 条相干光束在屏幕上某点 p 的总相位差为 2π 或 2π 的整数倍，这 N 个振幅矢量将构成一个首尾相连的封闭的正 N 边形或整数 (k') 个相同且相接的正多边形 (总边数为 N)，因而合振幅为零。故 N 条光束干涉暗条纹的条件用相位差可表示为

$$\Delta\phi = \pm \frac{2k'\pi}{N}, \quad k' = 1, 2, \dots$$

而现在知道两个相邻狭缝的光振幅矢量间的相位差为 $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(a+b)\sin\theta$ ，将其代入上式，则 N 条光束矢量构成闭合图形时，干涉暗条纹的条件 ($N\Delta\phi = \pm 2k'\pi$, $k' = 1, 2, 3, \dots$ 其中 $k' \neq 0$) 为

$$N(a+b)\sin\theta = \pm k'\lambda, \quad k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots \quad (8-32)$$

式中 $k' \neq N, 2N, 3N, \dots$ 是因为这已属于光栅方程 [见式 (8-20)] 规定的应出现主极大的情形。

由上述分析可知，式 (8-31) 所给出的相邻的两明纹之间有 $N-1$ 个暗条纹，明纹的宽度由它相邻的两个暗纹中心位置决定， N 越大，明纹宽度越窄。而在两个暗纹之间又必定有一明纹，故而由光栅方程规定的两明纹之间，还有 $N-2$ 个明纹，其光强远小于主极大，显得很弱，称为次极大。事实上，若 N 很大，光栅衍射的暗纹和次明纹形成一片黑暗的背景，正是由于这种特性，使主极大占据的宽度很小，而呈现出又亮又细的各级主明纹，这给光谱观察带来极大的方便，通常把这个光谱称为这个波长的光谱线。

从前面讨论可以知道，光栅的明纹条件是

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda$$

而单缝衍射的暗纹条件是

$$a\sin\theta = \pm k''\lambda$$

所以当 $\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k''}$ 为整数比时，发生缺级现象。例如， $\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k''} = \frac{3}{1}$ 时，就会出现缺级。即在 $k = 3, 6, 9, \dots$ 这些主明纹应该出现的地方，实际上却观察不到。讨论见例 8-6。

4. X 射线衍射

如图 8.11 所示，当一束 X 射线射到间距为 d 的两原子平面层的晶体上时，散射波相互干涉加强的条件为

$$2d\sin\theta = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8-33)$$

上式称为布拉格公式。

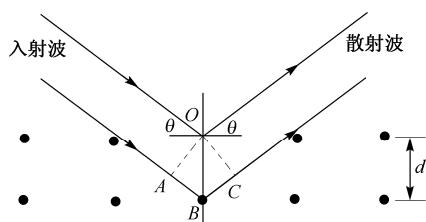


图 8.11 推导布拉格公式用图

5. 光的偏振

(1) 自然光和偏振光

光是电磁波，光的振动矢量 \mathbf{E} 与光的传播方向垂直。光振动矢量 \mathbf{E} 的振幅按统计平均来说沿各方向均等的光称为自然光。如果光振动矢量 \mathbf{E} 只沿某一方向振动，这样的光称为线偏振光，简称偏振光。光的振动方向和传播方向组成的平面称为振动面。由于线偏振光的光矢量保持在固定的振动平面内，所以线偏振光又称为平面偏振光。

光的偏振态包括自然光、线偏振光、部分偏振光、椭圆偏振光、圆偏振光。

(2) 偏振光的起偏和检偏

从自然光获得偏振光的过程称为起偏。产生起偏作用的光学元件称为起偏器。偏振片是一种常用的起偏器。

两个平行放置的偏振片 P_1 和 P_2 (见图 8.12)。当自然光垂直照射 P_1 时，透过的光为线偏振光，其振动方向平行 P_1 的偏振化方向，强度 I_1 等于自然光强度 I_0 的 $1/2$ 。由 P_1 出来的线偏振光入射到 P_2 偏振片时，出射光也为线偏振光，这时如果让 P_2 沿垂直光轴平面缓慢旋转（小于 90° ），透过的光强度随 P_2 的旋转而变化，当 P_2 偏振化方向与 P_1 的偏振化方向平行时，出射光矢量的光强最强；当 P_2 偏振化方向与 P_1 的偏振化方向垂直时，出射光矢量的光强为零，这种现象称为消光。利用消光现象，可以识别入射光是否为偏振光，这种识别偏振光的方法称为检偏。

(3) 反射和折射时光的偏振

自然光入射到两种不同介质（折射率分别为 n_1 、 n_2 ）的分界面上反射或折射时，反射光和折射光都将成为部分偏振光，如图 8.13(a)所示。实验表明：反射光的偏振化程度随着光的入射角变化而变化，当为一特定入射角 i_B 时反射光有可能成为完全偏振光，折射光为部分偏振光，如图 8.13(b)所示。这个特定的入射角 i_B 为布儒斯特角，也叫起偏角。

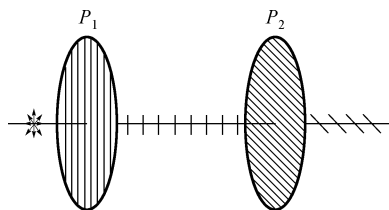


图 8.12 起偏和检偏

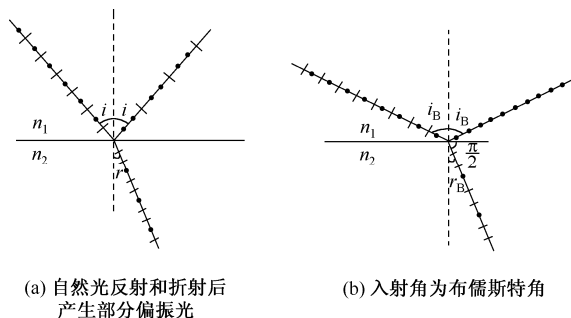


图 8.13 反射和折射时光的偏振

(4) 基本定律

马吕斯定律: $I = I_0 \cos^2 \alpha$ 。其中, I_0 为入射偏振光的强度, α 为入射偏振光振动方向与出射偏振光振动方向之间的夹角, 如图 8.14 (a) 所示。

布儒斯特定律: 当自然光以布儒斯特角 i_B [见图 8.14(b)] 入射到折射率分别为 n_1 和 n_2 的两种介质的分界面上发生反射时, 产生线偏振光的条件是

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (8-34)$$

式中, $n_{21} \left(= \frac{n_2}{n_1} \right)$ 是介质 2 对介质 1 的相对折射率。

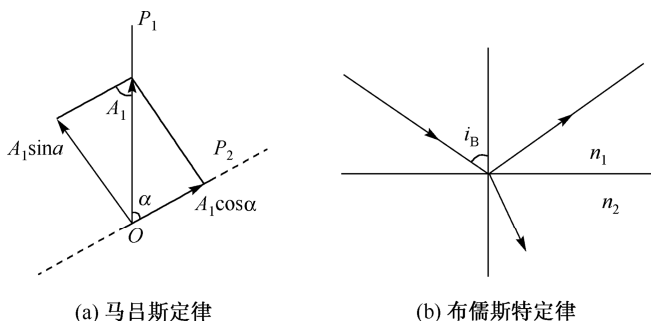


图 8.14 基本定律

6. 双折射现象

(1) 寻常光和非常光

一束光射入各向异性的晶体后分成两束折射光的现象称为双折射。其中一束光遵从折射定律, 称为寻常光, 用 o 表示 (简称 o 光); 另一束不遵从折射定律, 称为非常光, 用 e 表示 (简称 e 光)。

o 光和 e 光都是线偏振光, 但 e 光折射线不一定在入射面内。o 光在晶体内各方向上的传播速度相同, 而 e 光的传播速度却随传播方向的变化而变化。

(2) 光轴、单轴晶体、双轴晶体、主平面

光轴: 在双折射晶体内有一特殊方向, 光沿这个方向传播时将不发生双折射, o 光和 e 光沿该方向的折射率 (或传播速度) 相同, 这一特殊方向称为光轴。注意: 平行于此方向的直线均为光轴。

单轴晶体: 只有一个光轴的晶体。如方解石、石英等。

双轴晶体: 有两个光轴的晶体。如云母、硫磺等。

主平面: 晶体中光的传播方向与晶体光轴构成的平面。注意: 一般情况下, o 光主平面与 e 光主平面不重合。

(3)* 人为双折射

① 以人为 (外界) 条件使某些非晶体变成各向异性, 从而显示出双折射性质, 称为人为双折射。

② 各向同性的材料在机械效应力作用下显示光学上的各向异性，产生双折射现象，称为光弹效应，也称机械双折射或应力双折射。

③ 在外磁场作用下，某些非晶体也会显示出双折射性质，称为人为磁致双折射效应。

(4)* 旋光现象

旋光性：当线偏振光通过某些透明物质时，其振动面将以光的传播方向为轴线旋转一定的角度，这种现象称为旋光性。不同物质可以使偏振光的振动面向不同的方向旋转（有左旋和右旋之分）。

(5)* 光与物质的相互作用

光在介质中的传播过程，就是光与介质相互作用的过程。光的吸收、散射和色散是光在介质中传播时所发生的普遍现象，并且它们是相互联系的。

8.3 重点难点分析

1. 本章重点

(1) 几何光学中的三条基本定律；平面反射和平面折射、球面反射和球面折射成像的基本规律，并能够分析和计算一般的光反射和折射问题；透镜成像的基本规律，能够绘制一般透镜成像的光路图。

(2) 光的干涉和衍射，波的基本特征；光的相干性、光程差的概念；通过计算各种情况下相干光束的光程差以及某些原因引起的光程差的改变量，从而确定明、暗条纹的位置；干涉条纹的特征及条纹的移动和变化；用波带法解释单缝衍射条纹的分布及其原理。

2. 本章难点

几何光学中的难点有：球面反射和球面折射成像的基本规律，分析和计算一般的光反射和折射问题；透镜成像的问题。

波动光学中难点主要有干涉问题的一般分析方法和几种典型情况下光的干涉和衍射的光程差的计算方法，运用处理干涉问题的基本理论解释和分析干涉的现象和规律。理解这类问题的关键是弄清楚光程差的概念，光的干涉和衍射本质上都是光波的相干叠加，而相干叠加的强弱取决于相位差，光在介质中通过路程 L 时，所引起的相位变化相当于光在真空中通过 nL 路程时所产生的相位变化， nL 就是光程，光程差即两束光到达相遇点的光程之差，相位差取决于光程差 ($\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$)，所以，引入光程和光程差是为了讨论相干强弱条件，进而分析干涉和衍射图样。光程差的计算要在确定参与相干叠加的光线的基础上，由几何关系计算光线通过的路径长度，乘以各通过区域的折射率的总和，即得该光线的光程，从而可写出相应两光线的光程差的表达式，计算光程差时特别要注意分析有无相位跃变，即有无半波损失存在。

8.4 精选例题与习题解答

1. 精选例题

例 8-1 如图 8.15 所示, 一长方形透明固体的折射率为 $n=1.35$, 一束光从空气中以入射角 θ 进入透明固体, 要使入射光刚好在固体的垂直面 MN 上发生全反射, 则入射角 θ 应为多少?

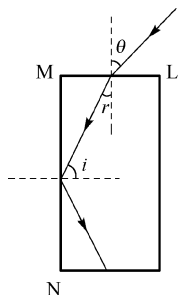


图 8.15 例 8-1 图

分析: 根据全反射定律确定光线入射于垂直面 MN 的入射角 i , 然后确定从空气中进入透明固体的入射角 θ 。

解: 在透明固体的上表面 ML 上, 根据折射定律有

$$n_{\text{空气}} \sin \theta = n \sin r$$

设空气折射率 $n_{\text{空气}} = 1$, 则有

$$\sin r = \frac{\sin \theta}{1.35}$$

在透明固体的侧面 MN 上由于发生全反射, 因此根据折射定律, 有

$$n \sin i = n_{\text{空气}} \sin 90^\circ \quad \text{即} \quad n \sin i = 1$$

根据题图的几何关系, 应有 $i = 90^\circ - r$, 所以有

$$n \sin i = 1.35 \sin(90^\circ - r) = 1.35 \cos r = 1$$

即有 $\cos r = \frac{1}{1.35}$, 因为 $\sin^2 r + \cos^2 r = 1$, 所以有

$$\frac{\sin^2 \theta}{1.35^2} + \frac{1}{1.35^2} = 1$$

解得 $\sin \theta = 0.907$, 即有

$$\theta = \arcsin 0.907 = 65.1^\circ$$

故入射角为 $\theta = \arcsin 0.907 = 65.1^\circ$ 时, 入射光刚好在固体的垂直面 MN 上发生全反射。

例 8-2 如图 8.16 所示, 圆柱体玻璃棒置于空气中, 其折射率为 1.52。设玻璃棒的一端为球面状, 半径为 $R = 2.0 \text{ cm}$ 。设一个小物体位于玻璃棒的顶端左侧 8.00 cm 的 p 处。求:

- (1) 物体的像距。
- (2) 横向放大率。

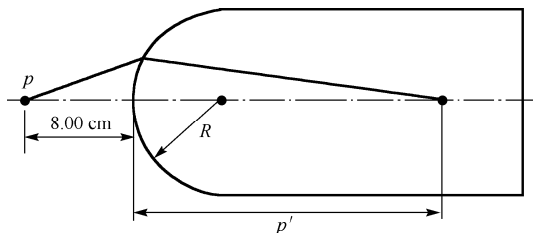


图 8.16 例 8-2 图

分析：该题为球面折射成像问题。根据已知的空气折射率、玻璃折射率，由球面折射成像公式计算出像距，并进一步计算出横向放大率。

解：(1) 空气折射率为 $n_1 = 1.00$ ，玻璃折射率为 $n_2 = 1.52$ ，物距 $p = 8.00 \text{ cm}$ 。由于物体面为凸面，因此 $R = +2.00 \text{ cm}$ 。由球面折射成像公式，有

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

得

$$\frac{1.00}{8.00} + \frac{1.52}{p'} = \frac{1.52 - 1.00}{2.00}$$

解得像距为

$$p' = 11.3 \text{ cm}$$

(2) 球面折射成像的横向放大率

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 p'}{n_2 p} = -\frac{1.00 \times 11.3}{1.52 \times 8.00} = -0.929 \quad (\text{倒立像})$$

例 8-3 一架望远镜由焦距为 100.0 cm 的物镜和焦距为 20.0 cm 的目镜组成，成像在无穷远处，求

(1) 该望远镜的视角放大率。

(2) 如果被观察物的高度为 50.0 m ，距离望远镜为 2.0 km ，则物镜成像的像高是多少？

(3) 最终的像对人眼的张角为多大？

分析：望远镜的视角放大率可以由物镜和目镜的焦距来确定。望远镜的物镜成像于其焦面位置，即像距等于焦距 ($p' = f_1$)。根据物镜成像光路的几何关系，可求出像的高度。

解：(1) 望远镜的视角放大率为

$$M = \frac{y'}{y} = -\frac{f_1}{f_2} = -\frac{100}{20} = -5.0$$

(2) 已知 $y = 50.0 \text{ m}$ ， $p = 2000 \text{ m}$ ， $f = 1.00 \text{ m}$ ，按比例关系， $\frac{y'}{y} = -\frac{f_1}{p}$ ，则有

$$y' = \frac{f_1}{p} y = \frac{1.00}{2000} \times 50.0 = 0.025 \text{ m}$$

(3) 最终的像对人眼的张角为

$$\theta = \frac{y'}{f_2} = \frac{2.5}{20.0} = 0.125 \text{ rad}$$

例 8-4 如图 8.17 所示，在双缝干涉实验中，用波长 $\lambda = 550 \text{ nm}$ 的单色平行光垂直入射到缝间距 $d = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$ 的双缝上，屏到双缝的距离 $D = 2 \text{ m}$ 。

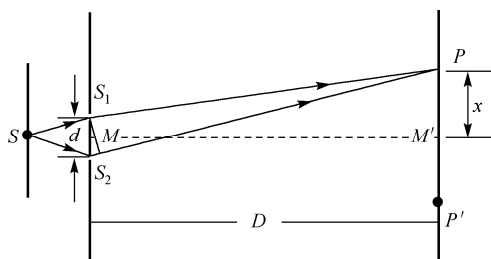


图 8.17 例 8-4 图

(1) 求中央明纹两侧的 ① 两条第 10 级明纹中心的间距; ② 光从 S_1 、 S_2 到点 P 的光程差。

(2) 用很薄的云母片 ($n=1.58$) 覆盖在双缝实验中的一条缝上, 屏上的零级明条纹移动到原来的第 7 级明纹的位置上, 求云母片的厚度。

(3) 若将其中一条缝盖住, 在对称轴上放一反射镜 MM' , 则在原第 10 级明纹处点 P 处有无干涉? 若有, 是明的还是暗的?

分析: 可用两相邻明 (或暗) 条纹的间距公式 $\frac{D\lambda}{d}$ 来计算明 (或暗) 纹中心的间距; 可用光程差公式 $\Delta = k\lambda$ 计算 S_1 、 S_2 到点 P 的光程差。在第二问中, 计算出有无云母片时, 某级条纹对应的光程差, 从而确定出两种情况光程差的变化建立等式求出介质的厚度; 第三问中, S_1 的光线经 MM' 反射到点 P 的光有半波损失。

解: (1) ① 因为两相邻明 (暗) 条纹的间距为 $\frac{D\lambda}{d}$, 共 20 个间距, 所以

$$x = 20 \frac{D\lambda}{d} = 0.11 \text{ m}$$

② 光从 S_1 、 S_2 到点 P 的光程差为

$$\Delta = k\lambda = 20 \times 550 \times 10^{-9} = 1.1 \times 10^{-5} \text{ m}$$

(2) 设云母片的厚度为 e , 则由光程差计算, 无云母片时, 第 7 级明条纹对应光程差满足

$$\Delta_7 = \frac{x_7 d}{D} = 7\lambda$$

有云母片时, 原第 7 级明纹的光程差为

$$\Delta'_7 = \frac{x_7 d}{D} - (n-1)e$$

因零级明条纹移到原来的第 7 级明纹的位置上, 所以

$$\Delta'_7 = \frac{x_7 d}{D} - (n-1)e = 0$$

即

$$(n-1)e = 7\lambda$$

故云母片的厚度为

$$e = 7 \frac{\lambda}{n-1} = 6.64 \times 10^{-6} \text{ m}$$

注意：该问题也可根据光程差变化引起条纹级次变化计算。

(3) 题图中经过 S_1 的光线经 MM' 反射到点 P 两相干光叠加后，在点 P 处也产生干涉条纹。此时，两相干光在点 P 的相位差与 (1) (2) 光从 S_1 和 S_2 到点 P 的光程差) 中相比相差 π (反射时的相位突变)，所以，此时点 P 处是暗条纹。

例 8-5 已知某波长为 9.0 cm 的高频声波穿过一宽度为 12.0 cm 的狭缝，一麦克风位于狭缝的中点 A 前 40.0 cm 处的 O 点。如图 8.18 所示，现将麦克风沿垂直于 AO 连线的方向移动，试问：麦克风移动到何处，将接收不到声音的信号？

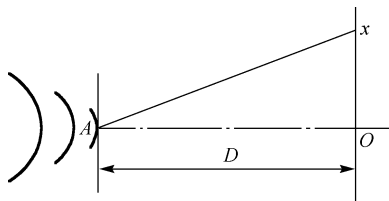


图 8.18 例 8-5 图

分析：麦克风接收不到信号处即为单缝衍射暗纹位置，因此本题要计算的是单缝衍射的暗纹位置。

解：已知 $\lambda = 0.09 \text{ m}$, $b = 0.120 \text{ m}$, $D = 0.4 \text{ m}$, 接收不到信号是由于声波衍射的结果，单缝衍射的暗纹公式为

$$b \sin \theta = k \lambda$$

接收不到声音信号的坐标位置 x 应正好位于暗纹处，因此

$$x = D \tan \theta = \frac{D \sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{D}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1}} = \frac{D}{\sqrt{\frac{b^2}{k^2 \lambda^2} - 1}}$$

将数值代入上式，当 $k=1$ 时，有

$$x = \frac{0.4}{\sqrt{\frac{0.120^2}{0.09^2} - 1}} = 0.454 \text{ m}$$

当 $k > 2$ 时，根号中出现负值，无意义。

例 8-6 波长为 600 nm 的单色光垂直入射在光栅上，第 2、3 级明纹分别出现在 $\sin \theta = 0.20$ 和 0.30 处，第 4 级缺级。试求：(1) 光栅上相邻两缝间距是多少？(2) 光栅上狭缝的宽度有多大？(3) 按上述选定的 a 、 b 值，在整个光屏上，实际呈现的全部级数为哪些？

分析：根据光栅衍射公式 $(a+b) \sin \theta = k \lambda$ 计算。

解：(1) 依题意， $k=2$ 时， $\sin \theta = 0.20$ ，故光栅上相邻两缝的间距为

$$(a+b) = \frac{2\lambda}{\sin \theta} = 6 \times 10^{-6} \text{ m}$$

(2) 光栅衍射明条纹第 4 级缺级时, 有

$$(a+b)\sin \theta = 4\lambda$$

由单缝暗纹公式

$$a \sin \theta = k' \lambda \quad (k' = 1, 2, \dots)$$

由此得 $\frac{a+b}{a} = \frac{4}{k'}$, 因 $\frac{a+b}{a} > 1$, 故 k' 只能取 1, 2, 3。从而

$$\frac{a+b}{a} = 1, 2, \frac{4}{3}$$

但由缺级条件

$$(a+b)\sin \theta = k\lambda$$

$$a \sin \theta = k' \lambda$$

可知, 若 $(a+b)/a = 2$, 则第 2 级明纹必定缺级, 所以, $(a+b)/a$ 只能取 4 或 4/3, 即

$$(a+b)/a = 4 \quad \text{或} \quad (a+b)/a = 4/3$$

由此得狭缝的宽度为

$$a = \frac{1}{4}(a+b) = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}$$

或

$$a = \frac{3}{4}(a+b) = 4.5 \times 10^{-6} \text{ m}$$

(3) 在 $0 < \theta < 90^\circ$ 的范围内, 因光栅公式为

$$(a+b)\sin \theta = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$k < \frac{a+b}{\lambda} = 10$$

因 k 为整数, 所以 $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ 。由此可知, 无论 a 取何值, 在 $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ 的范围内可能出现的明条纹级为 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 9$ 。但是, 由缺级条件可知, 在单缝衍射第 k' 级暗纹处缺级时, 有

$$\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k'}$$

若取 $a = \frac{1}{4}(a+b)$, 则

$$k = \frac{a+b}{a} k' = 4k' \quad (k' = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

因此, 当 $k = \pm 4, \pm 8$ 时出现缺级, 故在屏幕上呈现的全部级次只有 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$ 。

若取 $a = \frac{3}{4}(a+b)$, 则

$$k = \frac{a+b}{a} k' = \frac{4}{3} k'$$

因 k 和 k' 均为整数, 故 $k = \pm 4, \pm 8$ 时缺级, 可见屏幕上的全部级次与 $a = \frac{1}{4}(a+b)$ 时相同, 但两者的光强分布不相同。

例 8-7 一束平行自然光以 58° 角入射到平面玻璃表面上, 反射光束是完全偏振光, 求:

(1) 透射光束的折射角为多大?

(2) 玻璃的折射率为多大?

分析: 当反射光为线偏振光时, 入射角 i 与折射角 r 之和等于 90° , 由此可以求得折射角, 进一步根据布儒斯特定律可得到玻璃的折射率。

解: (1) 透射光束的折射角为

$$r = 90^\circ - i = 32^\circ$$

(2) 空气折射率为 $n_1 = 1.00$ 。由布儒斯特定律可计算得

$$n_2 = n_1 \tan \phi = 1.99 \tan 58^\circ = 1.60$$

例 8-8 试分析光的干涉与衍射的区别。

分析: 如果从光波相干叠加引起光强度的重新分布、形成稳定图样角度来看, 干涉和衍射并不存在实质性的区别。

通常习惯上把有限光束的相干叠加称为干涉。而把从同一波阵面上各点发出的无数个子波 (球面波) 的相干叠加称为衍射。

如果参与相干叠加的各光束是按几何光学直线传播的, 这种相干叠加是纯干涉问题, 如薄膜干涉, 这种情形下不同级次的光强是一样的。而衍射条纹不同级次的光强不同, 级次高 (k 越大) 光强越弱。

如果参与相干叠加的各光束的传播不符合几何光学模型, 每一光束存在明显的衍射, 这种情形中干涉和衍射是同时存在的, 如杨氏双缝等分波阵面的干涉。在存在衍射的情况下, 干涉条纹要受到衍射的调制。在杨氏双缝实验中, 缝宽不同, 则调制情况也不同, 当缝宽很小时, 单缝衍射的中央明亮区的衍射范围很大, 是其他各级条纹的两倍; 而双缝干涉条纹是等间距的。

在杨氏双缝情况下讨论缝间干涉时, 无须考虑衍射对干涉条纹的调制, 故称为双缝干涉。而把缝宽不是很小时形成的干涉条纹不等强度分布的情形, 称为双缝衍射。

对于单缝衍射, 明、暗的条件与干涉恰好相反, 分别为

$$\text{干涉:} \quad \Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{暗条纹}$$

$$\text{单缝衍射: } \Delta = a \sin \theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{明条纹}$$

这是因为前者两束相干光光程差为半波长的奇数倍时,两束光波相位相反,干涉减弱;而后者,在衍射角 θ 的方向上,无数多条衍射光线的最大光程差为半波长的奇数倍时,单缝能分成奇数个半波带,相邻两波带上对应的衍射光彼此相消后,最后剩下一个波带的衍射光不能相消,故得明纹。

例 8-9 在迈克耳孙干涉仪的一条臂中,沿着臂长方向放置一根长为 3.0cm 的真空管,真空管两端为透明玻璃。现向管内慢慢充入某种气体,直至管内气体的压强为 1 个大气压。在此过程中发现有 35 条明纹在屏上移过,求气体的折射率。(设干涉仪所用单色光的波长为 633 nm。)

分析: 35 条明纹的移动是由于真空管充气以后引起了光程差的改变而形成的。考虑到光线来回两次通过管子,因此光程差的改变为 $2(n-1)d$, 其中, n 为气体的折射率, d 为管长。

解: 光程差等于一个波长时,将有一条明纹的移动,现观察到有 35 条明纹的移动,则满足题意的干涉条件为

$$2(n-1)d = 35\lambda$$

则气体的折射率为

$$n = \frac{35\lambda}{2d} + 1 = \frac{35 \times 633 \times 10^{-9}}{2 \times 3.00 \times 10^{-2}} + 1 = 1.000\ 369$$

2. 习题解答

8.1 在双缝干涉实验中,波长 $\lambda = 500\text{ nm}$ 的单色光入射在缝间距 $d = 2 \times 10^{-4}\text{ m}$ 的双缝上,屏到双缝的距离为 2 m,则

(1) 每条明纹的宽度是 ()。

- A. $5 \times 10^{-3}\text{ m}$ B. $5 \times 10^{-2}\text{ m}$ C. $3 \times 10^{-2}\text{ m}$ D. 0.1 m

(2) 中央明纹两侧的两条第 10 级明纹中心的间距是 ()。

- A. $5 \times 10^{-3}\text{ m}$ B. $5 \times 10^{-2}\text{ m}$ C. $3 \times 10^{-2}\text{ m}$ D. 0.1 m

(3) 若用一厚度为 $e = 6.6 \times 10^{-6}\text{ m}$ 的云母片覆盖其中一缝后,零级明纹移到原来的第 7 级明纹处,则云母的折射率是 ()。

- A. 1.5 B. 1.53 C. 1.64 D. 2

分析与解:

(1) 应用明纹中心位置公式 $x = \pm k \frac{D}{d} \lambda$, 取 $\Delta k = 1$ 时,即每条明纹的宽度为 $5 \times 10^{-3}\text{ m}$ 。

(2) 应用明纹中心位置公式 $x = \pm k \frac{D}{d} \lambda$, 分别取 $k = 10$ 和 $k = -10$ 计算出明纹中心位置,

则两个位置之差为

$$x_{10} - x_{-10} = 10 \frac{D}{d} \lambda - (-10) \frac{D}{d} \lambda = 0.1\text{ m}$$

(3) 设云母片的厚度为 e ，则由光程差计算，无云母片时，第 7 级明条纹对应光程差满足

$$\Delta_7 = \frac{x_7 d}{D} = 7\lambda$$

有云母片时，原第 7 级明纹的光程差为

$$\Delta'_7 = \frac{x_7 d}{D} - (n-1)e$$

因零级明条纹移到原来的第 7 级明纹的位置上，所以

$$\Delta'_7 = \frac{x_7 d}{D} - (n-1)e = 0$$

即 $(n-1)e = 7\lambda$ ，由此解出 n ，所以

$$n = \frac{7\lambda}{e} + 1 = \frac{7 \times 500 \times 10^{-9}}{6.6 \times 10^{-6}} + 1 \approx 1.53$$

注意：该问题也可根据光程差变化引起条纹级次变化计算。

8.2 一折射率为 1.64，如图 8.19 所示，光线垂直入射到 AB 面，为使其在 AC 面上发生全反射，则

(1) 将此镜置于空气中时，角 α 的最大值是 ()。

- A. 35.81° B. $< 90^\circ$
C. 52.43° D. 45°

(2) 将此镜置于折射率为 1.33 的水中时，角 α 的最大值是 ()。

- A. $< 90^\circ$ B. 35.81°
C. 52.43° D. 60°

分析：根据光线在 AC 面上全反射条件，应用折射定律确定出光线在 AC 面上的入射角 i 。当将直角玻璃棱镜放于水中时，再次应用折射定律，这时只需将 $n_{\text{气}} = 1$ 换为 $n_{\text{水}} = 1.33$ ，重新计算出入射角 i' ；最后再应用题图中的几何关系，从而求出在水中时角 α 的最大值。

解：(1) 设空气的折射率为 1，由于在 AC 面发生全反射，因此根据折射定律，有

$$n \sin i = n_{\text{空气}} \sin 90^\circ$$

所以， $n \sin i = 1$ ，即 $i = \arcsin \frac{1}{n} = \arcsin \frac{1}{1.64} = 37.57^\circ$ ，由图中的几何关系，应有

$$\alpha = 90^\circ - i = 52.43^\circ$$

(2) 将此镜置于折射率为 1.33 的水中时，在 AC 面发生全反射，则有 $n \sin i' = n_{\text{水}} \sin 90^\circ$ ，

所以 $i' = \arcsin \frac{n_{\text{水}}}{n} = \arcsin \frac{1.33}{1.64} = 54.19^\circ$ ，即有

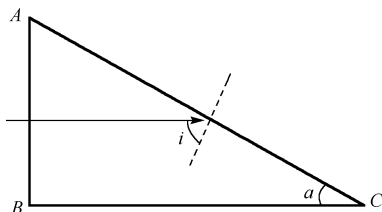


图 8.19 习题 8.2 图

$$\alpha = 90^\circ - i' = 35.81^\circ$$

故此题的(1)正确选项是C;(2)正确选项是B。

8.3 折射率为1.30的油膜覆盖在折射率为1.50的玻璃片上,用白光垂直照射油膜,观察到波长 $\lambda = 500 \text{ nm}$ 的绿色透射光加强,则油膜的最小厚度是()。

- A. 83.3 nm B. 250 nm C. 192.3 nm D. 96.2 nm

分析与解:由增透膜原理,光从空气中垂直入射膜上,这时光在两表面的光程差为 $2ne$, n 为膜的折射率,由于 $n_{\text{空气}} < n$,所以反射光在膜内上、下表面都有相位 π 的突变,因而没有附加的相位差.而两反射光干涉相消时满足关系

$$2ne = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad \text{其中 } k = 0, 1, 2, \dots$$

即可由 $k = 0$ 时,计算出波长为 λ 的单色光在膜的上、下表面反射后因干涉相消时的最小厚度为

$$e = \frac{\lambda}{4n} = \frac{500}{4 \times 1.30} = 96.2 \text{ nm}$$

所以,油膜的最小厚度是 $e = 96.2 \text{ nm}$,故正确选项应是D。

8.4 在单缝夫琅禾费衍射实验中,波长为 λ 的单色光垂直入射在宽度为 3λ 的单缝上对应于衍射角为 30° 的方向为第一级暗纹,则单缝处波阵面可分成的半波带数目为()。

- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 6个

分析与解:根据题意,由单缝衍射暗纹公式 $a \sin \theta = \pm 2k \frac{\lambda}{2}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ 可确定单缝处波阵面可分成的半波带数目。当 $k = 1$ 时,依题意有 $a = 3\lambda$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,故上式

$$a \sin \theta = \frac{3\lambda}{2} = 3 \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad \text{亦即为半个波长的3倍,所以缝面分成的半波带数目为3个。}$$

8.5 三个偏振片 P_1 、 P_2 和 P_3 堆叠在一起, P_1 、 P_3 的偏振化方向相互垂直, P_2 与 P_1 的偏振化方向间的夹角为 45° 。强度为 I_0 的自然光入射于偏振片 P_1 上,并依次透过偏振片 P_1 、 P_2 和 P_3 ,则通过三个偏振片后的光强度为()。

- A. $I_0/16$ B. $3I_0/8$ C. $I_0/8$ D. $I_0/4$

分析:假设自然光入射强度为 I_0 ,偏振片 P_1 对入射光具有起偏作用,透射光光强为 $I_0/2$;而偏振片 P_2 对入射的偏振光起检偏作用,此时透射与入射的偏振光强度满足马吕斯定律。同样,经 P_2 后的透射光进入 P_3 也遵从马吕斯定律。

解:根据以上分析,可知

$$I_P = I_{P_2} \cos^2 \alpha_2 = \left(\frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha_1 \right) \cos^2 \alpha_2 = I_0/8$$

故正确选项为C。

8.6 一直径为2 mm的氦氖激光束射向月球表面,其波长为632.8 nm。已知月球和地面的距离为 $3.84 \times 10^5 \text{ km}$,则

(1)在月球上得到的光斑的直径为_____。

(2) 如果这束激光经扩束器扩展为 2m, 则在月球表面上得到的光斑的直径为_____。

分析: 激光经激光器出射孔时, 将发生圆孔衍射, 由于月球离地面足够远, 可视为夫琅禾费圆孔衍射。月球上得到的光斑就是圆孔衍射的艾里斑。

解: (1) 设透光孔径为 D , 则由圆孔夫琅禾费衍射斑的半角公式

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

可得到在月球上光斑直径

$$d \approx 2\theta L = 2 \times 1.22 \times \frac{\lambda}{D} \times L$$

式中 L 为月球到地球的距离。代入数据, 得

$$d = 2.965 \times 10^5 \text{ m}$$

(2) 如果激光器被扩成 2 m 直径, 即光束直径扩展到原来的 2 mm 的 10^3 倍, 则光斑直径缩小到原来的 10^{-3} 倍, 故此时的光斑直径为

$$d = 2.965 \times 10^5 \times 10^{-3} = 2.965 \times 10^2 \text{ m}$$

8.7 光强为 I_0 的自然光垂直通过两个偏振片后, 出射光强 $I = I_0 / 8$, 则这两个偏振片的偏振化方向之间的夹角为_____。

分析: 该问题可由自然光通过第一个偏振片后的光强, 再由马吕斯定律求出光通过第二个偏振片后的光强。

解: 假设光通过偏振片时没有吸收和反射, 则光强为 I_0 的自然光通过第一个偏振片时, 透射光强为 $I_0 / 2$, 通过第二个偏振片时光强可由马吕斯定律求得

$$\frac{I_0}{8} = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha$$

所以 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, 即 $\alpha = 60^\circ$ 。

8.8 已知一球面凹面镜的曲率半径为 102.8 cm, 将一块平凸透镜的凸面放在凹面镜的凹面上, 如图 8.20 所示, 如果用波长为 589.3 nm 的钠光照射, 可观察到牛顿环, 并测得第 4 级暗环的半径为 2.250 cm。求平凸透镜的曲率半径。

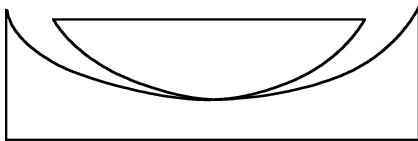


图 8.20 习题 8.8 图

分析: 本题是等厚干涉问题, 关键是要确定各处空气膜的厚度, 对于上面是平凸透镜,

下面是平板玻璃的一般牛顿环装置,在某处的空气厚度为 $d_1 = r^2 / 2R_1$; 现用凹面镜取代平板玻璃,该处空气膜的厚度要减小 $d_2 = r^2 / 2R_2$ 。

解: 凹凸面镜间空气膜的厚度为

$$\Delta d = r^2 / 2R_1 - r^2 / 2R_2 \quad (1)$$

暗环的干涉条件为

$$2n\Delta d + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

化简后为

$$2n\Delta d = k\lambda \quad (2)$$

将式(2)代入式(1),并注意到 $k=4$, $n=1$, 于是得

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{4\lambda}{r^2} = \frac{1}{1.028} - \frac{4 \times 589.3 \times 10^{-9}}{(2.25 \times 10^{-2})^2} = 0.968 \text{ m}^{-1}$$

即得平凸透镜的曲率半径

$$R_2 = 1.03 \text{ m}$$

8.9 在如图 8.21 所示的几种入射情况中,画出折射光和反射光,并用点和短线把其振动方向表示出来。图中 $i_0 = \arctan n$ (为起偏角), $i \neq i_0$ 。

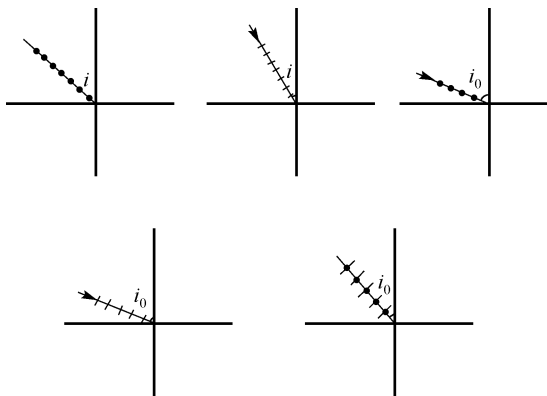


图 8.21 习题 8.9 图

解: 自然光从空气进入介质,若以任一入射角 i 入射,则反射光和折射光均为部分偏振光;以起偏角 i_0 入射时,则反射光为振动垂直于入射面的线偏振光,折射光为部分偏振光。

线偏振光从空气进入介质,若以任一入射角 i 入射,则反射光和折射光均为线偏振光,其振动方向与入射光线的振动方向相同;以起偏角 i_0 入射时,如果入射光振动方向平行于入射面,则无反射光,只有折射光;如果入射光振动方向垂直于入射面,则反射光和折射光均为线偏振光。题解如图 8.22 所示。

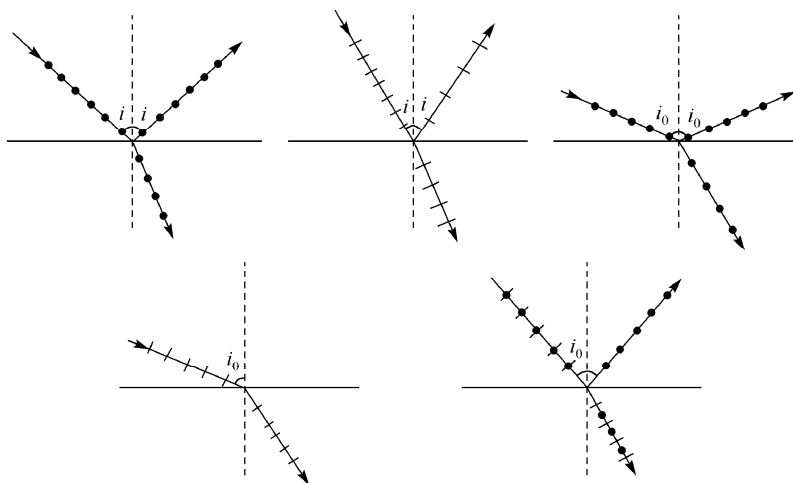
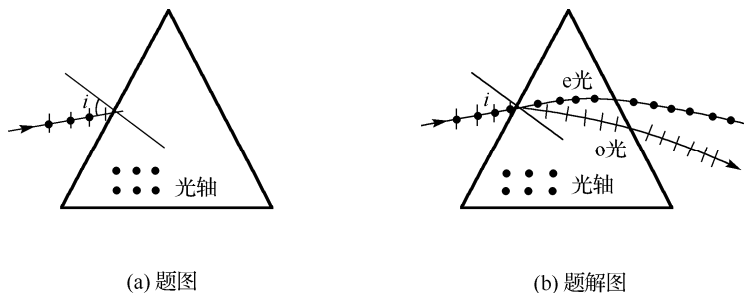


图 8.22 习题 8.9 解图

8.10 用方解石晶体（负晶体）切成一个截面为正三角形的棱镜，光轴方向如图 8.23(a) 所示，若自然光以入射角 i 入射并产生双折射，试定性分别画出 o 光和 e 光的光路及振动方向（负晶体： $v_o < v_e$ ，亦即 $n_o > n_e$ ）。

分析：光轴垂直入射面，且平行于晶面，平面波斜入射时，新波阵面仅沿光轴方向相切，而其他任何方向波阵面不相同，因而 o 光和 e 光发生了分离。

解：光的光路及振动方向如图 8.23(b) 所示。



(a) 题图

(b) 题解图

图 8.23 习题 8.10 图

8.11 如图 8.24(a) 所示，一射电望远镜的天线设在湖岸上，距湖面高度为 h ，对岸地平线上方有一恒星刚在升起，恒星发出的波长为 λ 的电磁波。试求当天线测得第一级干涉极大时恒星所在的角位置 θ （作为劳埃德镜分析）。

分析：天线接收到的电磁波一部分直接来自恒星，另一部分来自经湖面的反射波。由于恒星位于对岸地平线上方，入射于湖面的掠射角 θ 很小，反射时将发生“半波损失”。这两部分电磁场波是相干波，在接收天线处的波程差随 θ 而变。在恒星升起的过程中，射电望远镜所接收到的电磁波由于干涉，其强度时而加强，时而减弱。

解：来自远方的恒星的电磁波可视为平面波。如图 8.24(b) 所示，反射波在 Q 点反射时有“半波损失”。 h 处的天线测得第一级干涉极大时，其光程差为

$$\delta = r_2 - r_1 + \frac{\lambda}{2} = \lambda$$

根据图示的几何关系, 可有

$$r_1 = r_2 \cos 2\theta$$

所以

$$\delta = r_2(1 - \cos 2\theta) + \frac{\lambda}{2} = 2h \sin \theta + \frac{\lambda}{2} = \lambda$$

由于 $\sin \theta \approx \theta$, 所以, 解得

$$\theta = \frac{\lambda}{4h}$$

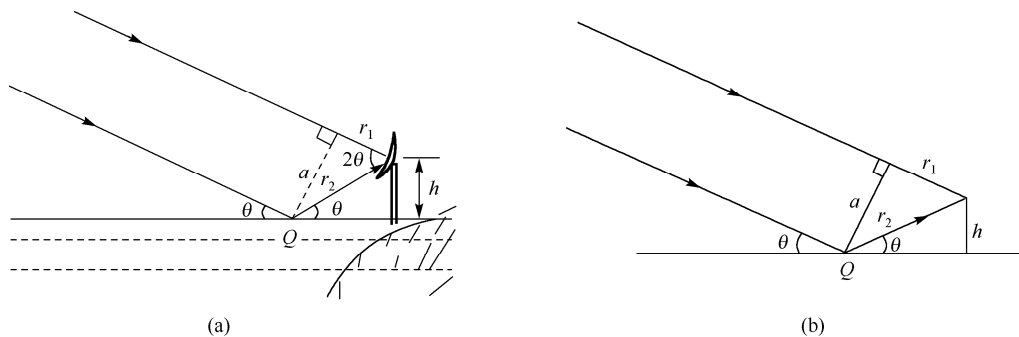


图 8.24 习题 8.11 图

8.12 用波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 的氦氖激光光源垂直照射光栅。已知第 1 级明纹出现在 30° 的方向上, 则 (1) 光栅常量是多少? (2) 该光栅每厘米内有多少条缝? (3) 第 2 级明纹是否可能出现? 为什么?

分析: 将已知条件代入光栅方程, 可求得光栅常量 d , 并进一步计算得到光栅缝数 N 。只有当衍射角 θ 小于 90° 时, 相应的条纹才能够在屏幕上出现。由此可以判断在屏幕上是否能看到每级条纹。

解: 由光栅方程

$$d \sin \theta = n\lambda$$

代入已知量 $\theta = 30^\circ$, $n = 1$, 得

$$d = \frac{n\lambda}{\sin \theta} = \frac{1 \times 632.8 \times 10^{-9}}{\sin 30^\circ} = 1.265 \times 10^{-6} \text{ m}$$

在 1 cm 内的缝数为

$$N = \frac{1}{d} = \frac{0.01 \text{ m}}{1.265 \times 10^{-6} \text{ m}} = 7905$$

由光栅方程知, $\sin \theta = n\lambda / d$, 当 $n = 2$ 时, 有 $\sin \theta = 2\lambda / d = 1.0005 > 1$, 这种情况是无意义的, 所以第 2 级明纹不会出现。

8.13 以波长为 589.3 nm 的钠黄光垂直入射到光栅上,测得第2级谱线的偏角为 $28^\circ 8'$ 。用另一未知波长的单色光入射时,它的第1级谱线的偏角 $13^\circ 30'$ 。(1)试求未知波的波长;(2)试问未知波长的谱线最多能观测到几级?

分析: 由已知条件,应用光栅方程建立方程组可求解未知波长;再由最大值条件可确定能观测到的条纹级数。

解: (1) 设 $\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}$, $\theta_0 = 28^\circ 8'$, $n_0 = 2$, λ 为未知波长, $\theta = 13^\circ 30'$, $n = 1$, 按题意可列出如下的光栅方程

$$d \sin \theta_0 = 2\lambda_0$$

$$d \sin \theta = \lambda$$

由此可解得

$$\lambda = 2\lambda_0 \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} = 584.9 \text{ nm}$$

(2) 由光栅方程 $d \sin \theta = n\lambda$ 可以看出, n 的最大值由条件 $|\sin \theta| \leq 1$ 决定, 对于波长为 584.9 nm 的谱线, 该条件给出

$$k \leq \frac{d}{\lambda} = \frac{2\lambda_0}{\lambda \sin \theta_0} = 4.3$$

所以最多能观测到第4级谱线。

8.14 光学仪器的分辨本领定义为: 是把恰能分辨的两条谱线的平均波长 λ 与这两条谱线的波长之差 $\delta\lambda$ 之比。用 R' 表示, 即 $R' = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ 。对于光栅来说, 试证明其分辨本领为

$$R' = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$$

而与光栅常数 d 无关。式中 N 为光栅的缝数, k 为光谱级次。

分析: 要分辨第 k 级光谱中波长为 λ 和 $\lambda + \delta\lambda$ 的两条谱线, 就是波长为 λ 的光的 k 级主极大正好和波长为 $\lambda + \delta\lambda$ 的光的第 $(Nk - 1)$ 级极小相重合。而在衍射角 θ 方向上产生的主极大条纹由光栅方程决定; 而在衍射角 θ 方向上产生衍射极小条纹由多缝干涉暗纹条件决定。故令两者相等即可证明。

证明: 由光栅方程

$$d \sin \theta = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

及满足暗纹条件的光栅方程

$$Nd \sin \theta = \pm k'\lambda, \quad k' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots$$

联立以上两式, 有

$$k\lambda = (Nk - 1) \frac{\lambda + \delta\lambda}{N}$$

整理后有

$$\lambda = (Nk - 1)\delta\lambda \quad \text{或} \quad \frac{\lambda}{\delta\lambda} = (Nk - 1)$$

因为 $Nk \gg 1$, 所以, 光栅的分辨本领为

$$R' = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$$

可见, 光栅的分辨本领与光栅常数 d 无关, 而与缝数成正比, 也与级次成正比。证毕。

8.15 在迎面驶来的汽车上, 两盏前灯相距 $r = 150 \text{ cm}$, 试求: 在离车多远处的人恰能分辨这两盏灯, 设夜间人的瞳孔直径 $D = 4.0 \text{ mm}$, 入射光波为 550 nm , 车与人的距离为 s 。

分析: 远处车灯对眼睛瞳孔形成夫琅禾费圆孔衍射, 在视网膜上形成的两个艾里斑恰可分辨时, 应满足瑞利准则, 即两个艾里斑中心对人眼瞳孔中心的张角 θ 与人眼的最小分辨角 θ_R 相等。

解: 如图 8.25 所示, 设两车灯距离为 r , 人与车之间距离为 s , 恰可分辨时, 两车灯对瞳孔的最小分辨角为

$$\theta = \frac{r}{s}$$

由瑞利准则, 有

$$\theta = \theta_R \approx 1.22 \frac{\lambda}{d} = \frac{r}{s}$$

可得

$$s = \frac{rd}{1.22\lambda} = \frac{1.5 \times 4 \times 10^{-3}}{1.22 \times 550 \times 10^{-9}} \text{ m} = 8.9 \times 10^3 \text{ m}$$

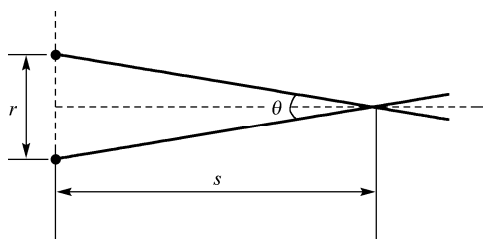


图 8.25 习题 8.15 解图

8.16 某种透明介质对空气的临界角 (指全反射) 等于 45° , 光从空气向此介质入射时的布儒斯特角是多少?

分析: 从某种透明介质射入空气时的临界角, 可求出该种物质的折射率, 然后再由此透明介质折射率求得光从空气向此介质入射时的布儒斯特角。

解: 设空气的折射率 $n_0 = 1$, 由全反射关系 $i_c = \arcsin \frac{n_0}{n}$ 得到, $n = 1.4142$ 。

所以, 光从空气向此介质入射时的布儒斯特角

$$i_B = \arctan \frac{n}{n_0} = \arctan 1.4142 = 54^\circ 43'$$

8.17 水的折射率为 1.33, 玻璃的折射率为 1.5, 当光由水中射向玻璃而反射时, 起偏角为多少? 当光由玻璃射向水而反射时, 起偏角又为多少?

分析: 可由布儒斯特定律求得光从一种介质射向另一介质时的起偏角。

解: (1) 设水和玻璃的折射率分别为 $n_{\text{水}} = 1.33$ 和 $n_{\text{玻璃}} = 1.50$, 由布儒斯特定律可知

$$\text{光从水中射向玻璃而反射时起偏角为} \quad i_{B_1} = \arctan \frac{n_{\text{玻璃}}}{n_{\text{水}}} = \arctan \frac{1.5}{1.33} = 48^\circ 26'$$

$$\text{光从玻璃射向水中而反射时起偏角为} \quad i_{B_2} = \arctan \frac{n_{\text{水}}}{n_{\text{玻璃}}} = \arctan \frac{1.33}{1.5} = 41^\circ 34'$$

(2) 这两个起偏角的数值是什么关系: 两角互余。

8.18 一束线偏振平行光, 在真空中波长为 589 nm, 垂直入射到方解石晶体上, 晶体的光轴和表面平行, 已知方解石晶体对此光的折射率为 $n_o = 1.658$ 、 $n_e = 1.486$, 则这晶体中的寻常光的波长 λ_o 和非寻常光的波长 λ_e 各为多少?

分析: 线偏振光垂直入射到方解石时, 会发生双折射现象。而 o 光和 e 光在晶体中的传播速度是不同的, 可以应用折射率与介质中的光速及真空中的光速的关系, 分别求出 o 光和 e 光在晶体中的波长。

解: 对于 o 光, 折射率常数为 $n_o = 1.658$, 由折射率与介质中的光速、真空中的光速的关系, 得

$$n_o = \frac{c}{v_o} = \frac{\nu \lambda}{\nu \lambda_o}$$

式中, c 为真空中的光速, v_o 为 o 光在晶体中的速度, ν 为光的频率, 光的频率在介质中不变, 所以 o 光的波长为

$$\lambda_o = \frac{\lambda}{n_o} = \frac{589}{1.658} \approx 355 \text{ nm}$$

对于 e 光, 只有当入射光与光轴方向垂直时, 具有确定的主折射率 n_e , 此时的波长为

$$\lambda_e = \frac{\lambda}{n_e} = \frac{589}{1.486} \approx 395 \text{ nm}$$

如果光束与光轴间成任意角度入射时, 则 e 光的波长会因入射光与光轴间夹角不同而改变, 其波长可能的范围为

$$355 \text{ nm} \leq \lambda_e \leq 395 \text{ nm}$$

8.19 一块厚度为 $1.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ 的方解石晶片, 插入偏振化方向相平行的两偏振片之间, 设晶片的光轴与偏振片的偏振化方向成 45° 角, 则在可见光范围内哪些波长的光看不见?

分析: 自然光通过第一块偏振片后变成线偏振光, 经过晶片后 o 光和 e 光产生恒定的相

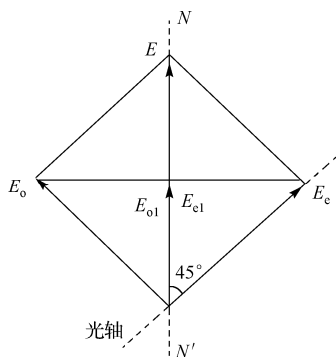


图 8.26 习题 8.19 解图

位差,但此时 o 光和 e 光的光振动方向不同,不满足干涉条件。第二块偏振片的作用是使 o 光和 e 光形成相同的振动方向,从而产生干涉,亦即在本题中是要确定干涉相消的波长(亦即为看不见的光)。

解: 已知偏振片的偏振化方向 NN' 与光轴的方向成 45° 夹角,偏振光进入方解石晶片后,形成两束偏振光 o 光和 e 光。它们的光振动振幅相等 ($E_o = E_e$),如图 8.26 所示。

由于 o 光和 e 光在晶片中的传播速度不同,因此从晶片出射的两束光存在相位差,其值为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$$

由晶片出射的两束光通过偏振片后振动方向一致,光振动振幅相同 ($E_o = E_e$),从而产生干涉,干涉相消条件为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = \pm(2k+1)\pi \quad k=1, 2, 3, \dots$$

所以

$$\lambda = \frac{2(n_o - n_e)d}{2k+1} = \frac{2 \times (1.658 - 1.486) \times 1.0 \times 10^{-5}}{2k+1} = \frac{3.44 \times 10^{-6}}{2k+1}$$

当 $k=2$ 时, $\lambda_2 = 6.88 \times 10^{-7} \text{ m} = 688 \text{ nm}$; 当 $k=3$ 时, $\lambda_3 = 4.91 \times 10^{-7} \text{ m} = 491 \text{ nm}$ 。而当 k 取其他值时,波长超出了可见光范围,人眼看不见。

8.20 棱镜 ABCD 由两个 45° 的方解石棱镜组成,棱镜的光轴方向如图 8.27(a)所示,当自然光垂直于 AB 入射时,(1)试在图中画出 o 光和 e 光的传播方向及光矢量振动方向;(2)若已知: $n_o = 1.66$, $n_e = 1.49$,求两出射光线间的夹角和振动方向。

分析: 如图 8.27(a)所示,对 ABD 棱镜,自然光垂直于晶体表面入射,在晶体内, o 光和 e 光分别以 v_o 和 v_e 沿原方向传播,但 $v_o < v_e$; 对 CBD 棱镜,来自左边棱镜的光束垂直光轴入射,但对 BD 表面是斜入射,因此在垂直于光轴的平面内, o 光和 e 光的传播方向将分开,如图 8.27(b)所示。但两条光线的主平面不平行, o 光的振动方向垂直于 o 光的主平面, e 光的振动方向平行于 e 光的主平面,都是线偏振光。在晶体中, o 光的球对称面和 e 光的以光轴为对称轴的旋转椭球波面在光轴方向上相切,因此,在垂直于光轴的平面(即纸面)内, o 光和 e 光的子波面都可表示成以入射点为圆心的同心圆弧,如图 8.27(c)所示。大圆弧与 e 光的波面对应。在左、右两棱镜的 e 光都与主折射率相对应,以最大速率 v_e 传播。但需要注意,左边棱镜 ABD 中 o 光和 e 光的主平面重合,而右边棱镜 CBD 中 o 光和 e 光的主平面不重合;左边棱镜中的 o 光在右边棱镜中成为 e 光;左边棱镜中的 e 光,则成为 o 光,当两光线从 CBD 棱镜出射后,相当于光从光密介质进入光疏介质,所以两光线将分得更开。

解: (1) o 光和 e 光的传播方向及光矢量振动方向如图 8.27(b)所示。

(2) 在 BD 界面,来自左边棱镜的光束以 $i = 45^\circ$ 入射,入射于 BD 的 o 光,折射成 e 光,设折射角为 i_e ,入射于 BD 的 e 光,折射成 o 光,设折射角为 i_o ,根据折射定律,有

$$n_e \sin i = n_o \sin i_o \quad \text{和} \quad n_o \sin i = n_e \sin i_e$$

可解得

$$i_o = \arcsin \frac{n_e \sin i}{n_o} = \arcsin \frac{1.49 \times \sin 45^\circ}{1.66} = 0.69 \text{rad} = 39^\circ 42'$$

$$i_e = \arcsin \frac{n_o \sin i}{n_e} = \arcsin \frac{1.66 \times \sin 45^\circ}{1.49} = 0.91 \text{rad} = 51^\circ 58'$$

由解图可知, CBD 棱镜中的 o 光在 CD 界面的入射角 i_{o1} 为

$$i_{o1} = i - i_o = 45^\circ - 39^\circ 24' = 5^\circ 36'$$

e 光在 CD 界面的入射角 i_{e1} 为

$$i_{e1} = i_e - i = 51^\circ 58' - 45^\circ = 6^\circ 58'$$

经折射后, 这两个偏振光束在空气中的折射角分别为 i_{o2} 和 i_{e2} , 再次运用折射定律, 有

$$n_e \sin i_{e1} = \sin i_{e2} \quad \text{和} \quad n_o \sin i_{o1} = \sin i_{o2}$$

可解得

$$i_{e2} = \arcsin(n_e \sin i_{e1}) = 0.18 \text{rad} = 10^\circ 25'$$

$$i_{o2} = \arcsin(n_o \sin i_{o1}) = 0.16 \text{rad} = 9^\circ 19'$$

所以, 两束出射光线间的夹角为

$$\theta = i_{e2} + i_{o2} = 19^\circ 44'$$

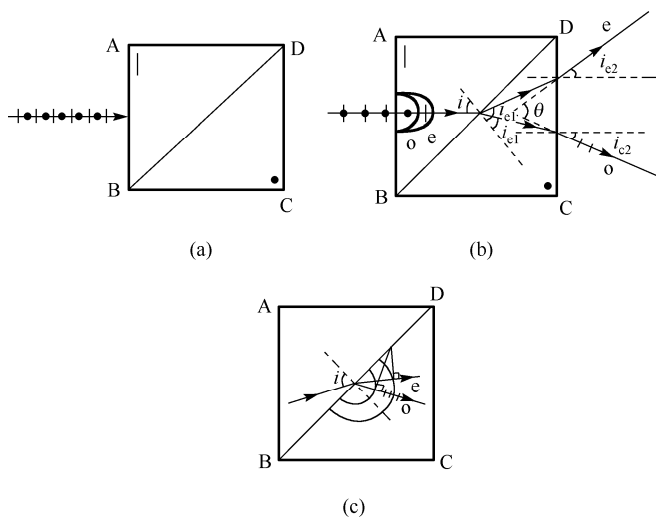


图 8.27 习题 8.20 图及解图

8.21 波长为 500 nm 的平行光垂直地入射于一宽为 1 mm 的狭缝, 若在缝的后面有一焦距为 100 cm 薄透镜, 使光线聚焦于一屏幕上, 试问从衍射图样的中心点到下列各点的距离如何? (1) 第一级暗纹中心; (2) 第一级明纹中心; (3) 第三级暗纹中心。

分析: 两条一级暗纹之间的宽度即为中央明纹的宽度。因此只要求出中央明纹的宽度, 也就知道了一级暗纹在屏幕上的坐标位置。可先由单缝衍射公式确定相应的衍射角, 从而确定中央明纹宽度。

解: (1) 明纹位于两条一级暗纹之间, 其半张角为

$$\varphi \approx \sin \varphi = \frac{\lambda}{b}$$

式中, b 为狭缝宽度, λ 为入射波波长。设明纹宽度为 l , $l = 2\varphi D$, D 为焦距, 将 φ 代入, 可得第一级暗纹中心

$$h = l/2 = \left(2 \times \frac{\lambda}{b} \times D\right) / 2 = 2 \times \frac{500 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-3}} \times 100 \times 10^{-2} / 2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$$

(2) 由单缝衍射明纹公式

$$b \sin \varphi = \pm(2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

取 $k=1$, 考虑 $\sin \varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda}{b}$, 代入数据, 得第一级明纹中心位置

$$h' = D \tan \varphi = \frac{D \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{D}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1}} = \frac{D}{\sqrt{\left(\frac{2b}{3\lambda}\right)^2 - 1}}$$

将数值代入得

$$h' = \frac{D}{\sqrt{\left(\frac{2b}{3\lambda}\right)^2 - 1}} = \frac{100 \times 10^{-2}}{\sqrt{\left(\frac{2 \times 1 \times 10^{-3}}{3 \times 500 \times 10^{-9}}\right)^2 - 1}} \approx 0.75 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(3) 由单缝衍射的暗纹公式 $b \sin \phi = k\lambda$, 得到

$$h'' = D \tan \varphi = \frac{D \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{D}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1}} = \frac{D}{\sqrt{\frac{b^2}{k^2 \lambda^2} - 1}}$$

将数值代入上式, 当 $k=3$ 时, 有

$$h'' = \frac{D}{\sqrt{\frac{b^2}{k^2 \lambda^2} - 1}} = \frac{100 \times 10^{-2}}{\sqrt{\frac{(1 \times 10^{-3})^2}{(3 \times 500 \times 10^{-9})^2} - 1}} \approx 1.499 \times 10^{-3} \text{ m}$$

8.22 为了测定一个给定光栅的光栅常数, 用氦氖激光器的红光 (波长为 632.8 nm)

垂直地照射光栅, 做夫琅禾费衍射实验。已知第一级明纹出现在 38° 的方向, 问 (1) 该光栅的光栅常数是多少? (2) 1 cm 内有多少条狭缝? (3) 第二级明纹出现在什么角度?

分析: 利用光栅方程 $d \sin \varphi = (a+b) \sin \varphi = \pm k \lambda$, 即可由题给条件求出光栅常数 (即两相邻缝的间距); 由此 1 cm 内有多少条狭缝, 即 $N = 1/d$; 再利用光栅方程和单缝衍射暗纹公式 $a \sin \varphi = k' \lambda$ 计算屏上的缺级情况。

解: 由题已知 $k=1$ 时, $\sin 38^\circ = 0.6157$, 即光栅常数为

$$d = (a+b) = k \frac{\lambda}{\sin \varphi} = \frac{632.8}{\sin 38^\circ} \text{ nm} = 1.03 \mu\text{m}$$

(2) 在 1 cm 内的狭缝数

$$N = 1/d = \frac{1}{1.03 \times 10^{-4}} = 9.708 \times 10^3 \text{ cm}^{-1}$$

(3) 由上分析知, 缺级条件是 $\begin{cases} (a+b) \sin \varphi = k \lambda, & k = 0, \pm 1, \dots \\ a \sin \varphi = k' \lambda, & k' = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$

则 $(a+b)/a = k/k' = m$, $k = mk'$, 即 mk' 级明纹缺级。

但在此题中, 当取 $k=2$ 时, 光栅方程 $(a+b) \sin \varphi = \pm k \lambda$ 没意义, 所以第二级明纹不成立。

8.23 如图 8.28 所示的入射 X 线束不是单色的, 而是含有从 0.095 nm 到 0.130 nm 这一范围内的各种波长。晶体的晶体常数 $a_0 = 0.275\text{ nm}$, 试问: 对图示的晶面族能否产生强反射?

分析: 此题实际上是求与晶面法线成 45° 的反射方向的反射光线加强产生亮点的入射波长, 可利用布拉格公式在 X 射线波长 0.095 nm 到 0.130 nm 范围内寻找。

解: 根据布拉格公式

$$2a \sin \theta = k \lambda$$

将 $\theta = 45^\circ$, $a_0 = 0.275\text{ nm}$ 代入, 可得

$$\lambda = \frac{2a \sin 45^\circ}{k} = \frac{0.389}{k}$$

在 0.095 nm 到 0.130 nm 范围内

$$\lambda_{\min} < \lambda < \lambda_{\max}$$

即

$$0.095 < \frac{0.389}{k} < 0.13 \quad \text{或} \quad 3.0 < k < 4.1$$

因为级次 k 只能取整数, 故 $k=3, 4$, 即

$$k=3 \text{ 时, } \lambda_3 = \frac{0.389}{3} = 0.130 \text{ nm}$$

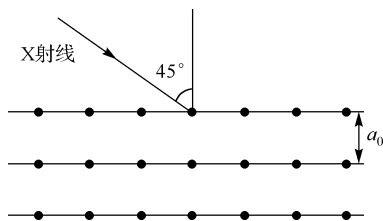


图 8.28 习题 8.23 图

$$k = 4 \text{ 时, } \lambda_4 = \frac{0.389}{4} = 0.097 \text{ nm}$$

所以, 入射 X 射线束的波长为 0.095 nm 到 0.130 nm 时, 晶体可产生强反射。

8.24 一帶有玻璃的密闭气室, 长度 $d = 5.0 \text{ cm}$, 实验前, 气室的空气浓度与外面相同, 现把气室放在迈克尔孙干涉仪(见第 9 章迈克尔孙-莫雷实验)的一臂上。实验中用波长 $\lambda = 589 \text{ nm}$ 的光。现在用真空泵将气室中的空气缓慢抽出来, 在抽气过程中观察到有 51 条条纹通过视场, 根据这些数据, 试求空气的折射率。

分析: 当气体从气室缓慢抽出前、后, 光通过气室的光程是不同的, 即要产生光程差。因而将引起干涉条纹位置发生变化。

解: 抽真空前后光程差的变化为 $2(n-1)d$, 所以

$$2(n-1)d = N\lambda$$

故由此可求得折射率

$$n = \frac{N\lambda}{2d} + 1 = \frac{51 \times 589 \times 10^{-9}}{2 \times 5.0 \times 10^{-2}} + 1 = 1.003$$

8.25 把金属丝夹在两块夹板之间, 形成空气劈尖, 如图 8.29 所示, 金属丝和棱边间距离为 $D = 28.88 \text{ mm}$, 用波长 $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ 的钠光照射, 测得 30 条明纹间的距离为 4.295 mm , 求金属丝的直径 d 。

分析: 这是一个劈尖干涉在工程技术中的应用问题, 对于空气劈尖, 只要测出细丝到棱边的距离、条纹间距和已知波长, 就可以利用相邻两明纹间距和劈尖的关系求出金属丝的直径。

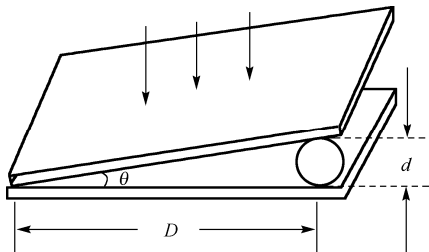


图 8.29 习题 8.25 图

解: 由图示的几何关系可得

$$d = D \tan \theta$$

式中 θ 为劈尖角。相邻两明纹间距和劈尖的关系为

$$\Delta L = \frac{\lambda}{2n\theta}$$

因为 θ 很小, $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta = \frac{\lambda}{2\Delta L}$, 于是有

$$\begin{aligned} d &= D \tan \theta = D \cdot \frac{\lambda}{2\Delta L} \\ &= 28.880 \times \frac{589.3 \times 10^{-9}}{2 \times 4.295 / 30} = 5.746 \times 10^{-2} \text{ mm} \end{aligned}$$

即金属丝的直径 $d = 5.746 \times 10^{-2} \text{ mm}$ 。

第9章 狭义相对论基础

从对力学部分的讨论中可知，以牛顿运动定律为基础的经典力学的概念和理论，对解决宏观物体在低速运动时卓有成效，且对现代科学和技术的发展起到了很大的推动作用，其自身的理论也日趋完善。

19世纪末，随着麦克斯韦电磁理论的建立，不仅对宏观的电磁现象进行了总结，而且预言了电磁波的存在。人们发现真空中光速在任何方向都以同一速度 c 传播，与参考系的选择无关。但按照当时经典力学的伽利略速度变换式，物体的速度是和惯性系的选取有关的，如果这样，光速就应该随惯性系的选取而有所不同，也即光速不再是一个常量。显然这一结论与经典力学的伽利略速度变换公式相矛盾，为了解决这一矛盾，当时很多物理学家设计了各种实验，力求去寻找符合经典绝对空间的惯性系——以太参考系。1887年迈克尔孙(A.A.Michelson)和莫雷(E.W.Morley)的著名实验就是其中之一，但该实验结果没有找到“以太参考系”，却得出了否定的结果，即以太参考系是不存在的。鉴于这些事实，爱因斯坦在麦克斯韦电磁理论的基础上，洞察到经典时空观的缺陷，从而革命性地提出光速不变原理和狭义相对论，从而建立了新的力学理论——相对论。

相对论给出了高速物体的力学规律，并从根本上改变了长久以来所形成的时间、空间和运动的陈旧观念（经典时空观认为在所有惯性参考系中，时间和空间的量度是绝对的，它们不随进行量度的参考系变化），从而建立了新的时空观——相对论力学则认为时间和空间的测量与惯性参考系的选择有关，相对论揭示了质量和能量的内在联系。根据狭义相对论的两条基本假设，由洛伦兹变换关系，给出了“同时的相对性”、“时钟延缓”、“长度收缩”等相对论效应。需要特别说明的是相对论力学适用于高速运动的情况，也适用于低速运动的情况，当物体做低速运动时，相对论力学就过渡为经典力学。

9.1 学习要求

1. 狭义相对论的两个基本假设

- (1) 了解伽利略变换和牛顿绝对时空观。
- (2) 掌握狭义相对论两条基本原理，理解时空的相对性；掌握伽利略坐标变换和洛伦兹坐标变换；掌握相对论速度变换及相关运算。
- (3) 了解相对论与经典力学的区别和联系。

2. 狭义相对论的几个重要结论

- (1) 掌握同时性的相对性、长度收缩和时间延缓概念。
- (2) 理解相对论质量与动量，相对论能量及能量与动量的关系。

(3) 了解光与电磁波的多普勒效应; 了解电与磁的统一性。

9.2 内容提要

1. 经典力学的基本原理(牛顿力学时空观)

空间的广延性与时间的持续性是人们长期以来对时空的基本认识, 牛顿力学关于时间、空间的概念归纳为如下几个方面。

(1) 经典力学的绝对时空观

包括: ①时间的绝对性, 即时间是均匀的, 时间间隔是绝对的, 时间间隔在一切惯性系中是相同的; ②空间的绝对性, 即空间是各向同性的, 长度是绝对的, 长度的测量在一切惯性系中是相同的; ③时间和空间是相互独立的, 彼此之间没有任何直接联系。

(2) 经典力学的相对性原理

在所有惯性系中, 物体运动所遵循的力学规律是相同的, 即具有相同的数学表达形式, 或者说, 对于描述力学现象的规律而言, 所有惯性系是等价的。

(3) 伽利略变换

① 伽利略坐标变换:

$$\text{正变换为} \begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{逆变换为} \begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (9-1)$$

② 伽利略速度变换:

$$\text{正变换为} \begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad \text{逆变换为} \begin{cases} v_x = v'_x + u \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \quad (9-2)$$

③ 伽利略加速度变换:

$$\text{正变换为} \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \quad \text{逆变换为} \begin{cases} a_x = a'_x \\ a_y = a'_y \\ a_z = a'_z \end{cases} \quad \text{即} \mathbf{a} = \mathbf{a}' \quad (9-3)$$

在牛顿力学中, 空间和时间不仅被看作同物质一样独立存在, 而且还扮演了某种具有绝对意义的角色, 它作为一个惯性系作用于一切物体。

牛顿力学相对性原理是在实验基础上总结出来的, 实践表明: 力学相对性原理反映了宏观物体做低速运动时的规律。

在伽利略变换中, K' 系的时间 t' 和 K 系的时间 t 是一样的, 即 $t' = t$ 。这意味着, 两个系的观察者可以共用一只钟, 即表明时间坐标是绝对的。

以牛顿定律为基础的经典力学在处理宏观、低速运动物体的问题上取得了辉煌的成就。但是,当物体的运动速度接近光速时,经典力学遇到了无法克服的困难,原因在于它是建立在绝对时间和绝对空间的基础上,认为时间和空间与物体的运动无关。为了解决这一困难,爱因斯坦抛弃了绝对时空观,提出了**相对性原理**和**光速不变原理**。

2. 爱因斯坦狭义相对论的两条基本原理

1905年爱因斯坦摒弃了以太假说和绝对参考系的想法,在前人实验的基础上提出了两条基本假设:

① 相对性原理:物理定律在一切惯性参考系中都具有相同的数学表达式,也就是说,所有惯性系对于描述物理现象都是等价的。

② 光速不变原理:在彼此相对做匀速直线运动的任一惯性参考系中,所测得的光在真空中的传播速度都是相等的。

3. 洛伦兹坐标变换

(1) 空间与时间的变换

$$\begin{aligned} \text{正变换为} \begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \end{cases} & \quad \text{逆变换为} \begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right) \end{cases} \end{aligned} \quad (9-4)$$

其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ 。

(2) 相对论速度变换

$$\text{正变换为} \quad v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \quad (9-5)$$

$$\text{逆变换为} \quad v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}} \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}} \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}} \quad (9-6)$$

式中, v'_x 是物体相对于动系的速度, v_x 是物体相对于静系的速度, u 是动系相对于静系的速度。

说明:

① 当速度 u 、 v 远小于光速 c 时,相对论速度变换就转化为伽利略速度变换。这也表明在一般低速情况中,伽利略速度变换仍是适用的,只有当 u 、 v 接近光速时,才需使用相对论速度变换。

② 相对论速度变换遵从光速不变原理。

4. 狭义相对论的时空观

(1) 同时的相对性

设在 K' 参考系内的两点 x'_1 和 x'_2 同时发生某事件, K' 参考系的观察者认为是同时发生的, 而 K 系的观察者认为不是同时发生的; 同样在 K 参考系内两地同时发生的两件事, 在 K' 参考系内认为不是同时发生的。

说明:

- ① 在 K 系中, 发生在不同地点的同时发生的事件, 在 K' 系中观测并不同时发生;
- ② 在 K 系中, 发生在同一地点的同时发生的事件, 在 K' 系观测也是同时发生的;
- ③ 具有因果关系的事件, 其先后次序在 K 系、 K' 系中不能颠倒。

(2) 长度收缩

与物体有相对速度 v 的坐标系中测得的沿速度方向的物体长度, 总比与物体相对静止的坐标系中测得的固有长度短, 即

$$l' = l\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (\text{注意同时条件, 即在同一时刻去测量物体的两端}) \quad (9-7)$$

式中, l 是相对于物体为静止的参考系中测得物体的长度, 即固有长度。 l' 是相对于物体是运动的参考系中测得物体的长度。

(3) 时间延缓 (时间膨胀)

对于物体具有相对速度 v 的运动参考系中观测事物变化过程的时间间隔, 总比在与物体相对静止的坐标系中测得的时间间隔大, 即

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (\text{注意同地条件, 即两件事情发生在同一地点}) \quad (9-8)$$

式中, t_0 是相对于过程发生地点为静止的参考系中测得的时间间隔, 即固有时。 t 是相对于过程发生地点为运动的参考系中测得的时间间隔。

(4) 相对性与绝对性

时空具有相对性, 但是事件的因果关系不会因为参考系的选择发生变化, 这也是时空的绝对性。

5. 狭义相对论动力学基础

狭义相对论中的质量与速度关系为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (9-9)$$

式中, m_0 为物体相对于静止的惯性系中测出的质量, 称为静止质量; m 是物体相对于观察者具有相对速度 v 时的质量, 称为运动质量。

狭义相对论中的动量与速度关系为

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v \quad (9-10)$$

狭义相对论动力学的基本方程为

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \mathbf{v} \right) \quad (9-11)$$

质量和能量关系为

$$E = mc^2 \quad E_0 = m_0 c^2, \quad E_k = mc^2 - m_0 c^2 \quad (9-12)$$

式中, E 是总能, E_0 是静能, E_k 是动能。

动量和能量的关系为

$$E^2 = c^2 p^2 + E_0^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (9-13)$$

对于静止质量 $m_0 = 0$ 的粒子 (比如光子), 可以有能量和动量, 二者关系为

$$p = \frac{E}{c} \quad (9-14)$$

*6. 迈克尔孙-莫雷实验

1887 年迈克尔孙和莫雷设计了一个著名实验, 来寻找绝对静止的“以太”参考系。根据他们的设想, 如果存在以太并完全不被地球运动所带动, 那么地球对于以太的运动速度就是地球的绝对速度。他们制造了一台超干涉仪, 如图 9.1 所示。单色光从光源 S 发出, 经半镀银玻片 P 分成两束, 一束透过 P 向右, 被反射镜 M_1 反射折回 P , 再被 P 反射后进入望远镜 E ; 一束被 P 射向上, 被 M_2 反射折回, 再透过 P 后也进入望远镜 E 。 l_1 和 l_2 分别为干涉仪的两个彼此垂直的“臂”的长度, 整个装置浮在一个水银槽上, 可以在水平面内平稳地转动, 并保持光程 $PM_1 = PM_2$ 固定不变。设地球相对绝对参考系的速度为 v , 且使 $l_1 = l_2$, 则光束 (1) 沿 PM_1 与 v 平行, 光束 (2) 沿 PM_2 与 v 垂直。可以证明:

$$\textcircled{1} \text{ 光束 (1) 沿 } PM_1 \text{ 来回时间 } t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v};$$

$$\textcircled{2} \text{ 光束 (2) 沿 } PM_2 \text{ 来回时间 } t_2 = \frac{2l}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}。$$

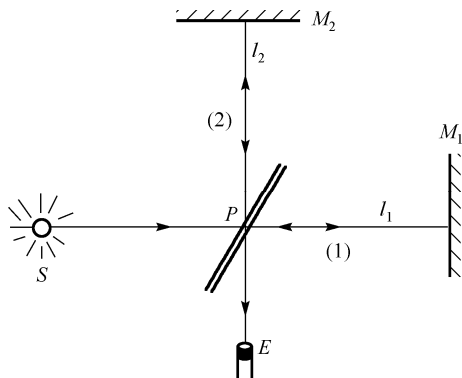


图 9.1 迈克尔孙-莫雷实验

并有 $\Delta t = |t_2 - t_1| = lv^2 / c^3$, 然后把整个仪器转动 90° 使其另一光臂沿地球运动方向, 利用地球的绝对运动速度和光速在方向上的不同, 即上述光束经历的路线正好相反, 则 t_1 和 t_2 时间正好互换。进而, 在转动过程中就能从望远镜中观察到干涉条纹的移动。从而求得地球相对于以太的绝对速度。

但是, 迈克尔孙和莫雷在不同地理条件、不同季节条件下进行多次实验, 却始终没能观察到干涉条纹的移动。该实验本来是用来验证以太参考系的存在, 却成为否定以太参考系的证据。狭义相对论正是在这种条件下提出的。

以太——电磁波传播时需要的一种弹性介质。以太充满整个空间(包括真空, 并渗透到一切物质的内部), 以太参考系是绝对静止系。

绝对参考系——相对于以太静止的参考系。在绝对参考系中, 光在各个方向的速度都相同。

*7. 电磁场的统一性和相对性

在洛伦兹变换下, 两个不同惯性参考系中电磁场的变换关系为

$$\text{电场} \begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \end{cases} \quad \text{与} \quad \text{磁场} \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + E_z v/c^2) \\ B'_z = \gamma(B_z - E_y v/c^2) \end{cases} \quad (9-15)$$

式(9-15)表明电场和磁场是彼此联系, 相互可以转化的。在一个惯性系中的电场不仅与另一个惯性系中的电场有关, 还与另一惯性系中的磁场有关, 反之亦然。这就是它们的统一性, 电磁场是客观存在着的物质, 而电场量和磁场量却只是它在某惯性系中的观测效应, 电磁场量与惯性系的选取有关, 这就是电磁场的相对性。电磁场是同一物质形成的两个方面。

9.3 重点难点分析

1. 本章重点

(1) 要清醒的认识一些非牛顿力学的概念, 如同时的相对性, 固有时间, 固有长度, 静止质量, 相对论动能和能量。

(2) 正确理解同时的相对性、长度收缩和时间延缓概念。

(3) 正确理解狭义相对论中的质量、动量、能量的关系。

2. 本章难点

(1) 经典力学认为时间和空间是绝对的; 狭义相对论认为时间和空间是相对的。

(2) 在经典力学中, 不同惯性参考系中的时间和空间满足伽利略变换; 相对论力学中, 不同惯性参考系中的时间和空间满足洛伦兹变换。

(3) 在应用洛伦兹变换时, 要先明确所涉及的事件和所用的参考系。

(4) 相对论力学认为不同惯性参考系中观测两个事件并不一定是同时发生的, 并且不

同惯性参考系中测得物体的尺寸、质量和事件经历的时间并不一定是相同的，由此出现了“长度收缩”、“时钟延缓”等相对论效应。

(5) 利用相对论讨论质量和速度关系时，应注意质量 m 是在一给定参考系中测得，式中的 v 是质点在该参考系中的速率，而不是两参考系的相对速率。

(6) 利用相对论的时空观及质能关系分析、计算相关问题。

9.4 精选例题与习题解答

1. 精选例题

例 9-1 (1) 牛顿力学的时空观与狭义相对论的时空观的根本区别是什么？二者有何联系？(2) 你认为在相对论中，是否一切都是相对的？有没有绝对性的方面？如有，是哪些方面？举例说明。

分析与解：(1) 牛顿力学的时空观认为自然界存在着与物质运动无关的绝对空间和时间，这种空间和时间是彼此孤立的；狭义相对论的时空观认为自然界时间和空间的量度具有相对性，时间和空间的概念具有不可分割性，而且它们都与物质运动密切相关。在远小于光速的低速情况下，狭义相对论的时空观与牛顿力学的时空观趋于一致。

(2) 在相对论中，并非一切都是相对的，也有存在绝对性的方面。例如，光相对于所有惯性系其速率是不变的，即是绝对的；如动量守恒定律、能量守恒定律等在所有惯性系中都是成立的，这也是绝对的；再者，对同时同地的两事件同时具有绝对性等。

例 9-2 如图 9.2 所示，在地面上测得有两个飞船 A、B 分别以 $+0.9c$ 和 $-0.9c$ 的速度沿着相反方向飞行。求飞船 A 相对于飞船 B 的速度。

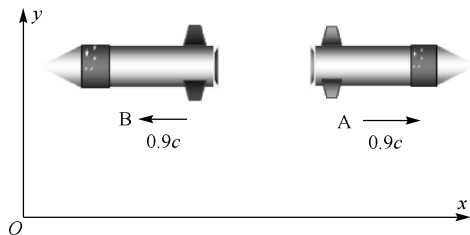


图 9.2 例 9-2 图

分析：因两飞船速度接近光速，它们之间的相对速度不能用伽利略的速度变换进行计算，要用相对论速度变换进行计算。例如，若利用伽利略的速度变换进行计算，则 A 相对于 B (或 B 相对于飞船 A) 的速度均为 $1.8c$ ，该结果是不符合光速不变原理的。

解法 1：以地球为静系，飞船 B 为动系，利用相对论速度变换关系式。其中 v'_x 是在飞船 B 上测得飞船 A 的速度， v_x 是在地球上测得飞船 A 的速度， u 是飞船 B 相对于地球的速度，将这些速度值代入相对论速度变换关系式得

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = \frac{0.9c - (-0.9c)}{1 - \frac{0.9c(-0.9c)}{c^2}} = 0.994c$$

解法 2: 以飞船 B 为静系, 地球为动系, 利用相对论速度变换关系式。其中 v'_x 是在地球上测得飞船 A 的速度, v_x 是在飞船 B 上测得飞船 A 的速度, u 是地球相对于飞船 B 的速度, 将这些速度值代入相对论速度变换关系式得

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} = 0.9, \quad c = \frac{v_x - 0.9c}{1 - \frac{0.9c \cdot v_x}{c^2}}, \quad v_x = 0.994c$$

解法 3: 以飞船 B 为静系, 飞船 A 为动系, 利用相对论速度变换关系式。其中 v'_x 是在飞船 A 上测得地球的速度, v_x 是在飞船 B 上测得地球的速度, u 是飞船 A 相对于飞船 B 的速度, 将这些速度值代入相对论速度变换关系式得

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = -0.9, \quad c = \frac{0.9c - u}{1 - \frac{0.9cu}{c^2}}, \quad u = 0.994c$$

从上述三种方法可以看出, 坐标系无论建在什么物体上, 关键是要弄清楚相对论速度变换中几个参数的含义。 v'_x 一定是物体相对于动系的速度 (或者说是在动系上面测得物体的速度), v_x 是物体相对于静系的速度 (或者说是在静系上测得物体的速度), u 是动系相对于静系的速度 (在静系上测得动系的速度)。

例 9-3 宇宙飞船相对地球以 $0.8c$ 飞行, 一光脉冲从船尾传到船头, 飞船上的观察者测得飞船长 90m , 地球上的观察者测得光脉冲从船尾传到船头两事件的空间间隔是()。

- (A) 30 m (B) 54 m (C) 270 m (D) 90 m

分析: 本题实为地球上的观察者测量两事件的空间间隔问题。(1) 如果用长度收缩公式计算, 则要求两件事情同时发生, 显然光脉冲发出和接收这不是同时事件; (2) 此题可用飞船上的观察者测得的飞船长度, 计算光脉冲从船头到船尾所需时间, 再应用洛伦兹变换计算地球上的观察者测得的空间间隔。注意下面四种解法的正误。

解法 1: 设飞船为 K' 系, 地球为 K 系, 由长度收缩公式得

$$\Delta l = \gamma^{-1} \Delta l' = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot \Delta l' = 0.6 \times 90 = 54\text{ m}$$

这个结果是错误的。一个是发射信号, 一个是接收信号, 两件事情不是同时发生。而利用长度收缩公式计算时则要求两件事情同时发生, 所以不能用长度收缩公式来计算, 只能用洛伦兹坐标变换公式计算。

解法 2: 飞船中, $\Delta x' = 90$, $\Delta t' = 90/c$ 。

$$\text{地球中, } \Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t') = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \left(90 + 0.8c \times \frac{90}{c} \right) = 270\text{ m}$$

此方法计算正确。

解法 3: 设飞船为 K 系, 地球为 K' 系, K' 相对 K 以 $0.8c$ 运动, 地球中, 有

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \left(90 - 0.8c \times \frac{90}{c} \right) = 30\text{ m}$$

此方法计算错误, 错误的原因在于将相对速度的方向考虑反了。此题是将飞船设为静系, 将地球设为动系, 飞船相对地球以 $0.8c$ 飞行, 则地球相对飞船的速度就应该为 $-0.8c$ 。

解法 4: 设飞船为 K 系, 地球为 K' 系, K' 相对 K 以 $-0.8c$ 运动, 地球中, 有

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} \left(90 - (-0.8c) \times \frac{90}{c} \right) = 270 \text{ m}$$

此方法计算是正确的。

因此解法 2 和解法 4 是正确的, 此题的正确答案是 (C)。

例 9-4 一位宇航员乘一艘火箭飞船以 $0.6c$ 的速度飞过地球, 同时校准他的时钟与地球时钟均指正午 12 点。按照宇航员的测定, 火箭飞船在午后 12 点 30 分通过一个相对地球静止不动的空间站, 并用无线电向地球报告。

- (1) 此时, 空间站的时钟指的是什么时间?
- (2) 宇航员测定地球到空间站的距离是多少?
- (3) 地球上观测者测定地球到空间站的距离是多少?
- (4) 地球上收到无线电信号, 地球上是什么时间?
- (5) 地球上收到无线电信号, 飞船上是什么时间?

分析与解:

(1) 火箭飞船测得为原时 (时钟相对于飞船静止), 利用时间延缓效应 (时钟计时时, 时钟的地点没有发生变换, 所以可以用时间延缓效应)。

$$\Delta t_{\text{空间站}} = \Delta t_{\text{火箭}} / \sqrt{1-v^2/c^2} = 30 / \sqrt{1-0.6^2} = 37.5 \text{ min}$$

因此, 空间站上时钟为午后 12 时 37 分 30 秒。

(2) 距离 = 速度 \times 时间。在飞船上的宇航员观测时, 地球则以 $0.6c$ 的速度远离宇航员, 所以这里所用到的速度是 $0.6c$ 。由于是在飞船上观测, 所以时间用飞船上的时间, 即 30 min。所以宇航员测定地球到空间站的距离为

$$v \times \Delta t_{\text{火箭}} = 0.6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 30 \text{ min} \times 60 \text{ s/min} = 3.24 \times 10^{11} \text{ m}$$

(3) 地球上观测者测得距离 (这里的速度和时间都应该用地球上测得的速度和时间) 为

$$v \times \Delta t_{\text{空间站}} = 0.6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 37.5 \text{ min} \times 60 \text{ s/min} = 4.05 \times 10^{11} \text{ m}$$

(4) 按地球上的钟, 信号传播所需时间 = 距离/速度 = $\frac{4.05 \times 10^{11} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 60 \text{ s/min}} = 22.5 \text{ min}$

因此, 午后 12 时 37 分 30 秒 + 22 分 30 秒 = 午后 1 时, 地球上收到信号。

(5) 按飞船上的钟, 信号传播所需时间 = 距离/速度 = $\frac{3.24 \times 10^{11} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 60 \text{ s/min}} = 18 \text{ min}$

宇航员测得, 午后 12 时 30 分 + 18 分 = 午后 12 时 48 分, 地球收到信号。

例 9-5 在北京正负电子对撞机中, 电子的动能可以被加速为 $E_k = 2.8 \times 10^9 \text{ eV}$ 。

(1) 这种电子的速率和光速相差多少?

(2) 这种电子的动量多大?

(3) 这种电子在周长为 240 m 的储存环内绕行时, 它受到的向心力为多大? 需要多大的偏转磁场?

分析: (1) 应用相对论质量和能量关系, 求出电子速度, 再与光速比较, 测得与光速之差; (2) 应用相对论动量与速度关系, 测得电子的动量; (3) 应用带电粒子在磁场中所受洛伦兹力(做圆周运动的向心力)关系, 可求得偏转磁场的大小。

解: (1) 由相对论质量和动能公式得

$$E_k = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 - m_0 c^2$$

反解出电子速度为

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_k} \right)^2}$$

将数据代入上式中得电子速度与光速之差, 为

$$\begin{aligned} \Delta v &= c - c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0 c^2 + E_k} \right)^2} \\ &= 3 \times 10^8 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{9.11 \times 10^{-31} \times 9.0 \times 10^{16}}{9.11 \times 10^{-31} \times 9.0 \times 10^{16} + 2.8 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19}} \right)^2} \right] \approx 5.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

(2) 由于电子的速度与光速接近, 根据动量与速度关系得电子的动量, 为

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8 - 5)}{\sqrt{1 - \left(\frac{3 \times 10^8 - 5}{3 \times 10^8} \right)^2}} \approx 1.48 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 由于电子进入磁场后, 带电粒子将在垂直磁场的平面内做匀速率圆周运动, 做圆周运动的向心力即为电子受到的洛伦兹力, 为

$$F = m \frac{v^2}{r} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{2\pi v^2}{l} = \frac{9.11 \times 10^{-31}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3 \times 10^8 - 5}{3 \times 10^8} \right)^2}} \cdot \frac{2\pi (3 \times 10^8 - 5)^2}{240}$$

$$F \approx 1.18 \times 10^{-11} \text{ N}$$

由洛伦兹力与磁场的关系 ($\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$), 得磁场大小为

$$B = \frac{F}{ev} = \frac{1.18 \times 10^{-11}}{1.6 \times 10^{-19} \times (3 \times 10^8 - 5)} \approx 0.25 \text{ T}$$

例 9-6 已知质子和中子的质量分别为 $m_p = 1.00728 \text{ u}$, $m_n = 1.00866 \text{ u}$, 两个质子和两个中子组成一个氦核 ${}^4_2\text{He}$, 实验室测得它的质量为 $m_A = 4.00150 \text{ u}$, 试计算形成一个氦核时放出的能量 ($1 \text{ u} = 1.660 \times 10^{-27} \text{ kg}$)。

分析: 由质子和中子结合成氦核时, 比较结合前后的质量变化, 这部分增加的质量转化为能量释放出来, 再根据相对论质能关系可计算形成一个氦核时放出的能量。

解: 两个质子和两个中子组成氦核前总质量为

$$m = 2m_p + 2m_n = 4.03188 \text{ u}$$

而从实验室测定, 氦核质量 m_A 小于质子和中子的总质量 m , 差额为

$$\Delta m = m - m_A = 0.03038 \times 1.660 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

根据质能关系, 结合成一个氦核所释放的相应的能量为

$$E = \Delta mc^2 = 0.03038 \times 1.660 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 = 0.4539 \times 10^{-11} \text{ J}$$

结合成 1 mol 氦核时所放出的能量为

$$E = 2.733 \times 10^{12} \text{ J}$$

这差不多相当于燃烧 100 t 煤时所产生的热量。

2. 习题解答

9.1 令电子的速率为 v , 则电子的动能 E_k 与比值 v/c 的图线, 可用图 9.3 所示中哪一个图表示? ()

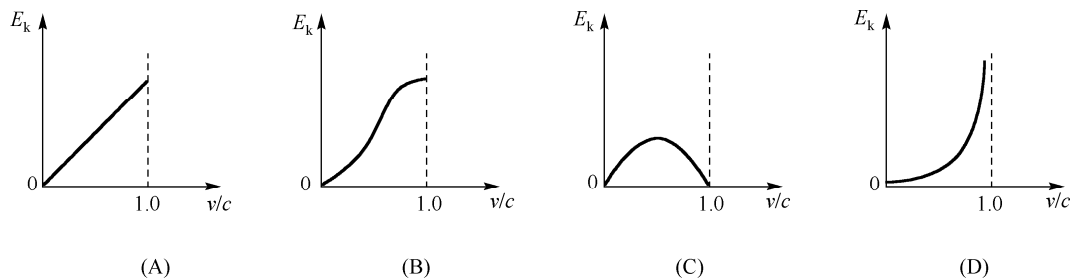


图 9.3 习题 9.1 图

分析与解: 由质量和能量关系及 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, 可得

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right)$$

又由上式知, 当 $v/c = 0$ 时, $E_k = 0$; 当 v/c 增加时, E_k 增加; 当 $v/c \rightarrow 1$ 时, $E_k \rightarrow \infty$ 。根据以上三种情况分析, 所以正确选项为 D。

9.2 水平面上有一半径为 R 的圆孔, 在同一平面上有物体以 0.6 倍光速远离此孔, 如图 9.4(A)所示, 则站在此物体上观察, 圆孔的数学描述如图 9.4(B)~(E)所示的 4 种描述, 正确的应为 ()。

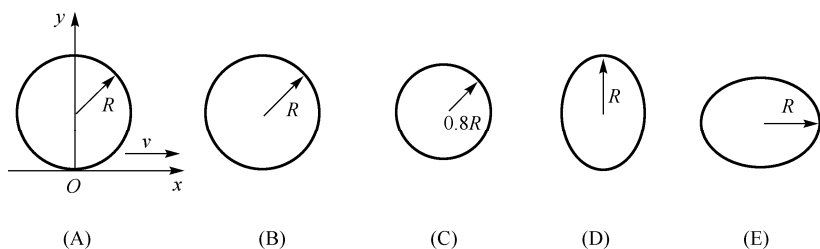


图 9.4 习题 9.2 图

分析与解：当物体在 x 轴方向运动时，物体长度在 x 方向有收缩，而其他方向长度不变，所以正确选择项为 D。

9.3 判断下面几种说法是否正确 ()。

- (1) 所有惯性系对物理定律都是等价的。
- (2) 在真空中，光速与光的频率和光源的运动无关。
- (3) 在任何惯性系中，光在真空中沿任何方向传播的速度都相同。
- (A) 只有 (1)、(2) 正确 (B) 只有 (1)、(3) 正确
- (C) 只有 (2)、(3) 正确 (D) 三种说法都正确

分析与解：(1) 描述的相对性原理，(2)、(3) 描述的光速不变原理。都是正确的，所以正确选项为 D。

9.4 有下面两个问题：(1) 对某观察者来说，发生在某惯性系中同一地点、同一时刻的两个事件，对于相对惯性系做匀速直线运动的其他惯性系中的观察者来说，它们是否同时发生？(2) 在某惯性系中发生于同一时刻、不同地点的两个事件，它们在其他惯性系中是否同时发生？

关于上述两个问题的正确答案是 ()。

- (A) (1) 同时，(2) 不同时 (B) (1) 不同时，(2) 同时
- (C) (1) 同时，(2) 同时 (D) (1) 不同时，(2) 不同时

分析与解：根据同时的相对性，发生在同一时刻同一地点的两事件，在其他惯性系中也是同时发生的；而发生在同一时刻不同地点的两事件在另一参考系中则不是同时发生。故正确答案选项为 A。

9.5 在狭义相对论中，下列说法中哪些是正确的？()

- (1) 一切运动物体相对于观察者的速度都不能大于真空中的光速。
- (2) 质量、长度、时间的测量结果都随物体与观察者的相对运动状态而改变。
- (3) 在一惯性系中发生与同一时刻，不同地点的两个事件在其他一切惯性系中也是同时发生的。
- (4) 惯性系中的观察者观察一个与他做相对运动的时钟时，会看到这时钟比与其他相对静止的相同的时钟走得慢些。

- (A) (1) (3) (4) (B) (1) (2) (4)
- (C) (1) (2) (3) (D) (2) (3) (4)

分析与解：(1) 描述的光速不变原理；(2) 描述的质量、长度、时间的相对论效应；(3) 描述的同时的相对性；(4) 描述的时间延缓。故正确答案选项为 B。

9.6 有一直尺固定在 K' 系中, 它与 Ox' 轴的夹角 45° , 如果 K' 系以匀速度沿 Ox 正方向相对于 K 系运动, K 系中观察者测得该尺与 Ox 轴的夹角_____ 45° (选填“大于”、“小于”或“等于”)。

分析与解: 设在 K' 系中测得直尺的长度为 l' , 根据题意, 则 K' 系中测得直尺在 Ox' 轴方向的分量大小为 $l'/\sqrt{2}$, 在 Oy' 轴方向分量的大小为 $l'/\sqrt{2}$ 。由于 K' 系以匀速度沿 Ox 正方向相对于 K 系运动, 所以在 K 系中测得直尺在 Oy 轴方向分量的大小不变, 沿 Ox 轴方向的分量根据长度收缩公式 $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 应该变短, 所以在 K 系中观察者测得该尺与 Ox 轴的夹角应大于 45° 。

9.7 设某微观粒子的总能量是它的静止能量的 k 倍, 则其运动速度 v 的大小为(以 c 表示真空中的光速)_____。

分析: 此题由质能关系求解。

解: 根据题意, 总能量是它静止能量的 k 倍, 即 $E = kE_0$, 所以

$$mc^2 = km_0c^2 \quad \text{或} \quad \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = km_0c^2$$

解得

$$v = \frac{c}{k} \sqrt{k^2 - 1}$$

9.8 一火箭的固有长度为 L , 相对于地面做匀速直线运动, 速度为 v_1 , 火箭上有一个从火箭的后端向火箭前端上的一个靶子发射一颗相对于火箭的速度为 v_2 的子弹。(1) 在火箭参考系中测得子弹从射出到击中靶的时间间隔是_____;(2) 在地面参考系中测得子弹从射出到击中靶的时间间隔是_____。

分析: 设地球为 K 系, 火箭为 K' 系。火箭上测得击中靶的时间间隔就为火箭长度除以子弹相对火箭的速度; 在地球上, 由于火箭相对地球以一定速度运动, 因此必需考虑时间的相对论效应。

解: (1) 设地球为 K 系, 火箭为 K' 系, 火箭上测得击中靶的时间间隔为

$$\Delta t' = \frac{L}{v_2}$$

(2) 因为火箭速度为 v_1 , 火箭的固有长度为 L , 根据洛伦兹逆变换, 则有

$$\Delta t = \frac{\frac{L}{v_2} + \frac{v_1}{c^2} L}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}}$$

此题应用的是洛伦兹变换而没有时间延缓, 主要是因为子弹发射和子弹中靶并不是在同一地点发生, 而时间延缓效应的公式是两事件在同一地点发生。

9.9 某种介子静止时的寿命为 10^{-8} s , 质量为 10^{-25} g 。如它在实验室中的速度为 $2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 则它的一生中能飞行_____m。

分析: 取 K 系与实验室相连, K' 系与介子相连。由于介子相对 K 系的速率为 $2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 根据时间膨胀关系, 在实验室中测得介子的平均寿命, 然后计算介子在衰变前在实验室通过的距离。

解: 根据时间延缓效应, 介子以 $2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 速度飞行时的寿命为

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow t = \frac{10^{-8}}{\sqrt{1-(2 \times 10^8)^2/c^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times 10^{-8} \text{ s}$$

介子在衰变前在实验室通过的距离

$$L = vt = (2 \times 10^8) \times \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \times 10^{-8} \right) = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

9.10 观察者甲以 $4c/5$ 的速度相对于静止的观察者乙运动, 若甲携带一长度为 l , 截面积为 S , 质量为 m 的棒, 这根棒沿运动方向放置, 则甲测得此棒的密度为 _____; 乙测得此棒的密度为 _____。

分析: 这是一个相对论问题, 因此对运动参考系而言, 首先要考虑长度的收缩。

解: 棒相对于甲静止, 故甲测得其密度为

$$\rho_{\text{甲}} = \frac{m}{lS}$$

棒相对于乙运动, 故乙测得棒的长度、质量为

$$l' = l\sqrt{1-(0.8)^2} = 0.6l$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1-(0.8)^2}} = \frac{5}{3}m$$

所以, 乙测得此棒的密度为

$$\rho_{\text{乙}} = \frac{m'}{l'S} = \frac{25m}{9lS}$$

9.11 在惯性系中, 一次爆炸发生在坐标 $(x, y, z, t) = (6\text{m}, 0, 0, 2 \times 10^{-8}\text{s})$ 处, 一惯性参考系沿着 x 轴的正方向以相对速度 $0.8c$ 运动。假设在 $t = t' = 0$ 时两参考系的原点重合。试求运动参考系中观察者测得该事件的坐标。

分析: 由于 K' 系相对 K 系以相对速度 $0.8c$ 运动, 根据狭义相对论原理, 它们的时空坐标应遵从洛伦兹变化, 所以该题直接应用洛伦兹变换求解。

解: 根据洛伦兹变换, 物体在沿着 x 的正方向运动, 所以有 $y' = y$, $z' = z$, x' 、 t' 坐标为

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{6 - 0.8c \times 2 \times 10^{-8}}{\sqrt{1-(0.8c/c)^2}} = 2 \text{ m}$$

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{2 \times 10^{-8} - (0.8c/c^2) \times 6}{\sqrt{1 - (0.8/c)^2}} = 0.67 \times 10^{-8} \text{ s}$$

在运动参考系中观察者测得该事件的坐标为 $(x', y', z', t') = (2\text{m}, 0, 0, 0.67 \times 10^{-8} \text{ s})$ 。

9.12 火车上观察者测得火车长为 0.3 km ，火车以 $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 的速度行驶，地面上观察者发现有两个闪电同时击中火车的前后两端，火车上的观察者测得闪电击中火车前后两端的时间间隔为多少？先击中车头还是车尾？

分析：设地面是 K 系，火车为 K' 系，把两闪电击中火车前后两端视为两个事件，即两组不同的时空坐标。地面观察者看到两闪电同时击中，即两闪电在 K 系中的时间间隔为 $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ 。火车的长度是相对于火车静止的观察者测得的长度（注：物体长度在不指明观察者的情况下，均指相对于其静止参考系测得的长度），即两事件在 K' 系中的空间间隔为 $\Delta x' = 0.3 \text{ km}$ 。 K' 系相对于 K 系的速度即为火车速度。因此可直接由洛伦兹关系式求解。

解：由洛伦兹关系式可得

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - (v/c^2)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

注意上式中 $x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ，将该式代入上式得

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1) = -\frac{100 \times 10^3 / 3600}{(3 \times 10^8)^2} \times 300 = -9.26 \times 10^{-14} \text{ s}$$

负号说明火车上的观察者测得闪电先击中车头。

9.13 火箭相对于地面以 $0.6c$ （ c 为真空中光速）的匀速度向上飞离地球。在火箭发射 10 s 后（火箭上的钟），该火箭向地面发射一导弹，其速度相对于地面为 $0.3c$ ，问火箭发射后多长时间（地球上的钟），导弹到达地球？计算中假设地面不动。

分析：设地面是 K 系，火箭为 K' 系。由 K' 系（火箭发射后的）时间 $\Delta t' = 10 \text{ s}$ ，可求出相对地球时钟的发射时间 Δt_1 ；由此计算这段时间火箭相对地面上飞行的距离 l ，然后以这个距离可计算出从火箭上发射导弹到达地球的时间 Δt_2 。因此，从火箭发射后到导弹到达地球所需的总时间则为 $\Delta t_1 + \Delta t_2$ 。

解：按地球的钟，导弹发射的时间是在火箭发射后

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = 12.5 \text{ s}$$

这段时间火箭相对地球飞行的距离

$$l = u\Delta t_1 = 0.6c \times 12.5 = 7.5c$$

则导弹从发射到飞到地球的时间是

$$\Delta t_2 = \frac{l}{v_1} = \frac{7.5c}{0.3c} = 25 \text{ s}$$

因此，从火箭发射后到达地面的时间是

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 37.5 \text{ s}$$

9.14 在参照系 K 中, 有两个静止质量都是 m_0 的粒子 A 和 B, 分别以速度 v 沿同一直线相向运动, 相碰后合在一起成为一个粒子, 则该粒子的静止质量 M_0 为多少?

分析: 由相对论中动量与速度关系及动量守恒关系, 注意考虑两粒子在碰撞前动量大小相等、方向相反, 所以碰撞后速度为零(静止); 故可用相对论中的质量与速度关系, 计算合成粒子静止质量 M_0 。

解: 两粒子相碰撞前后动量守恒, 为

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{m_0(-v)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{M_0 V}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

式中 V 是合成粒子的速度。由上式可得 $V = 0$ 。所以碰撞之后合成粒子静止质量 M_0 的值为

$$M = M_0 = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

9.15 K 系与 K' 系是坐标轴相互平行的两个惯性系, K' 系相对于 K 系沿正方向匀速运动, 一根刚性尺静止在 K' 系中, 与 $O'x'$ 轴成 30° 角, 今在 K 系中观察得该尺与 Ox 轴成 45° 角, 则 K' 系相对于 K 系的速度是多少?

分析: 该题根据相对论效应, 考虑在静止的 K 系中观察 K' 系物体沿运动方向长度缩短及在 K 系及 K' 系中正切的定义, 即可求 K' 系相对 K 系的速度。

解: 因 K' 系相对于 K 系沿 Ox 轴正方向运动, 所以 $\Delta y' = \Delta y$; 另刚性尺在 K' 系和在 K 系中与 $O'x'$ 轴、 Ox 轴夹角的正切分别为

$$\tan \theta' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}, \quad \tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

又根据长度缩短效应, 在 Ox 轴方向 $\Delta x = \Delta x' \sqrt{1-(u/c)^2}$, 联立上式, 即有

$$\frac{\Delta x}{\Delta x'} = \frac{\tan \theta'}{\tan \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{1-(u/c)^2}$$

由此解得 K' 系相对于 K 系的速度

$$u = \sqrt{\frac{2}{3}}c$$

9.16 飞船 A 中的观察者测得飞船 B 正以 $0.4c$ 的速率尾随而来, 一地面站测得飞船 A 的速率为 $0.5c$, 求: (1) 地面站测得飞船 B 的速率; (2) 飞船 B 测得飞船 A 的速率。

分析: 此题需正确选择静止参考系(地面为 K 系)和运动参考系(飞船 A 为 K' 系)。(1) 写出飞船 B 相对运动参考系的速率 v'_x 和飞船 A 相对静止参考系的速率 u , 由此可计算飞船 B 相对静止参考系的速率 v_x ; 飞船 B 测得飞船 A 的速率与飞船 A 中的观察者测得飞船 B 正好相反。

解: (1) 选择地面为 K 系, 飞船 A 为 K' 系, 则有 $v'_x = 0.4c$, $u = 0.5c$, 故

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + (v_x / C^2)v'_x} = \frac{3}{4}c$$

(2) 飞船 B 中的观察者测得飞船 A 的速率为

$$v_{BA} = -v_{AB} = -v'_x = -0.4c$$

9.17 一短跑选手，在地球上以 10 s 时间跑完 100 m，在飞行速度为 $0.98c$ 的飞船中观察者观察，这选手跑了多少时间和多长距离？

分析：飞船中的观察者对自己来说是静止的，可设为静止参考系，而地球相对飞船来说是运动的。设飞船为 K 系，地面为 K' 系，则在 K' 系中两事件的时间间隔在 K 系的观察值可由时间膨胀公式确定，在 K' 系中两事件发生的空间间隔可由洛伦兹坐标变换求得。

解：设飞船为 K 系，地面为 K' 系，则发生在 K' 系中的时间间隔为 $\Delta t'$ ，空间间隔为 $\Delta x'$ ；在 K 系中两事件的时空坐标分别为 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2) ，由洛伦兹坐标变换

$$\begin{aligned}\Delta t = t_2 - t_1 &= \frac{t'_2 + ux'_2 / c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - \frac{t'_1 + ux'_1 / c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \\ &= \frac{\Delta t' + u(x'_2 - x'_1) / c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \approx \frac{10}{\sqrt{1 - (0.98c/c)^2}} = \frac{10}{0.199} = 50.25 \text{ s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta x = x_2 - x_1 &= \frac{x'_2 + ut'_2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - \frac{x'_1 + ut'_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \\ &= \frac{100 + 0.98c \times 10}{\sqrt{1 - (0.98c/c)^2}} \approx 1.48 \times 10^{10} \text{ m}\end{aligned}$$

其中 $\Delta x' = 100 \text{ m}$ ， $\Delta t' = 10 \text{ s}$ ， $u = 0.98c$ （ c 为真空中的光速）。亦即在飞船中观察者观察选手跑的时间和距离为

$$\Delta t = 50.25 \text{ s}, \quad \Delta x = 1.48 \times 10^{10} \text{ m}$$

9.18 设某微观粒子的总能量是它的静止能量的 K 倍，则其运动速度的大小为多少？（以 c 表示真空中的光速）

分析：利用相对论质能关系 $E = mc^2$ ，直接求解。

解：粒子的总能量是它的静止能量的 K 倍，即 $E = KE_0$ ，得

$$mc^2 = km_0c^2 \quad \text{或} \quad \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = km_0c^2$$

解得

$$v = \frac{c}{K} \sqrt{K^2 - 1}$$

9.19 甲相对乙以 $0.6c$ 的速率运动, 求: (1) 甲携带质量为 1 kg 的物体, 乙测得该物体的质量是多少? (2) 甲、乙分别测得该物体的总能量各是多少?

分析: 应用质量的相对论效应, 可求得乙测量物体的质量; 再应用质能关系可确定甲、乙分别测得该物体的总能量。

解: (1) 根据质量的相对论效应, 乙测量物体的质量为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = 1.2\text{ kg}$$

(2) 甲测得该物体的总能量为

$$E_0 = mc^2 = 9.00 \times 10^{16}\text{ J}$$

乙测得该物体的总能量为

$$E_0 = mc^2 = 1.13 \times 10^{17}\text{ J}$$

9.20 一物体的速度使其质量增加了 10% , 试问此物体在运动方向上缩短了百分之几?

分析: 由已知条件运动质量增加了 10% 和质量的相对论效应计算出洛伦兹变换因子 $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = u/c$, c 为光速。再由长度收缩关系, 可计算相对收缩量。

解: 设静止质量为 m_0 , 运动质量为 m , 由题设条件可知

$$\frac{m - m_0}{m_0} = 0.1$$

根据质量的相对论效应有

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

由以上两式可得

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - 1 = 0.1 \quad \text{或} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = 1.1$$

设物体在运动方向上的长度和静止长度分别为 l 和 l_0 , 则相对收缩量为

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \sqrt{1 - (u/c)^2} = 1 - \frac{1}{1.1} = 9.1\%$$

9.21 一发射台向东西两侧距离均为 L_0 的两个接收站 E 与 W 发射信号, 今有一飞机以匀速度 v 沿发射台与两接收站的连线由西向东飞行, 如图 9.5 所示。试问在飞机上测得两接收站接收到发射台同一信号的时间间隔是多少?

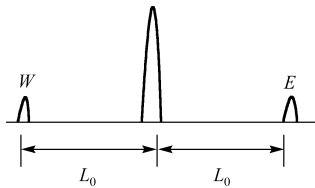


图 9.5 习题 9.21 图

分析: 这是一个关于相对论时间延缓问题, 同一信号

分别沿飞机飞行方向和相反方向传播, 因而沿两个方向时间延缓不相同, 分别求出飞机上测得的时间 t'_E 和 t'_W , 最后求出 $\Delta t' = t'_E - t'_W$ 即可。

解: 在地面参考系中, 有

$$\Delta t = (L_0 / c) - (L_0 / c) = 0$$

在飞机参考系 (K' 系) 中

$$t'_E = \frac{t_E - vx_E / c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{和} \quad t'_W = \frac{t_W - vx_W / c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

所以, 有

$$\Delta t' = t'_E - t'_W = \frac{\Delta t - (v/c^2)(x_E - x_W)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{-2L_0 v}{c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

负号表示在飞机上观察到东侧先接收到信号。

9.22 在惯性系 K 中的同一地点先后发生 A 、 B 两个事件, B 晚于 A 的时间为 4 s , 在另一个惯性系 K' 中观察, B 晚于 A 的时间为 5 s , 求 (1) 这两个参考系的相对速度是多少? (2) 在 K' 系中, 这两个事件发生的地点间的距离多大?

分析: 在惯性系 K 中的同一地点先后发生 A 、 B 两个事件的时间间隔是固有时间 (也叫原时), 而同样两个事件发生的时间间隔在惯性系 K' 中观察值可由时间膨胀公式确定。在 K' 系中, 这两个事件发生地点的空间间隔可由洛伦兹坐标变换求出。

解: (1) 已知在惯性系 K 中, 测得的固有时间 $\Delta t = \Delta t_0 = 4\text{ s}$, 在惯性系 K' 中, 测得时间是 $\Delta t' = 5\text{ s}$ 。

由时间膨胀公式

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

解得两个参考系的相对速度

$$v = \frac{3}{5}c = 1.8 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 在 K' 系中, 这两个事件发生地点间的 (空间间隔) 距离为

$$\begin{aligned} |\Delta x'| &= |x'_2 - x'_1| = \left| \frac{x_0 - vt_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - \frac{x_0 - vt_2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right| = v\Delta t' = 1.8 \times 10^8 \text{ m} \end{aligned}$$

9.23 坐标系 K' 和 K 初始时刻坐标原点和三坐标轴均重合, 且 K' 系沿 K 系的 x 轴方向以 v 做匀速直线运动。若初始时刻从 K' 系的坐标原点 O' 沿 x' 正方向发射一光信号, 在 K' 中观察者测得光速 $u' = c$ 。求证在 K 系中的观察者观察光信号的速度也为 c 。

分析: 由洛伦兹速度变换关系直接证明。

解: 在 K 系中的观察者测得光信号的速度, 根据洛伦兹速度变换关系式可得

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = \frac{c + v}{\frac{c + v}{c}} = c, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}} = 0, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}} = 0$$

所以有 $u = u_x = c$ 。

9.24 惯性系 K' 相对于惯性系 K 以速度 v 运动。它们的坐标原点在初始时刻重合。在惯性系 K' 中一质点做匀速率圆周运动, 轨道方程为 $(x')^2 + (y')^2 = a^2$, $z' = 0$, 试证明在惯性系 K 中观测者测得该质点做椭圆运动, 椭圆的中心以速度 v 运动。

分析: 已知质点在惯性系 K' 中的运动方程, 由洛伦兹坐标变换可得到 K 系中质点的运动方程。

证明: 根据洛伦兹坐标变换关系, 有

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

将其代入惯性系 K' 中的运动方程, 得到

$$\frac{(x - vt)^2}{(1 - \beta^2)} + y^2 = a^2$$

化简得

$$\frac{(x - vt)^2}{a^2(1 - \beta^2)} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

这是轨道为椭圆的方程, 亦即质点在惯性系 K 中运动的轨迹为一椭圆, 椭圆中心以速度 v 运动。证毕。

9.25 一个静止质量为 m_0 , 动能为 $5m_0c^2$ 的粒子, 与另一个静止质量也为 m_0 的静止粒子发生完全非弹性碰撞。碰撞后复合粒子的静止质量为 m'_0 , 并以速度 v 运动。(1) 碰撞前系统的总动量是多少? (2) 碰撞前系统的总能量是多少? (3) 复合粒子的速度 v 是多少? (4) 给出 m'_0 和 m_0 之间的关系。

分析: 根据系统碰撞前后动能、动量的值, 再由动量和能量关系, 可求系统碰撞前的总动量; 碰撞前系统的总能量是一个静止粒子的静能和一个运动粒子的动能和静能的总和; 再由系统碰撞前后动量或能量守恒, 可确定 m'_0 和 m_0 的之间的关系。

解: (1) 根据动量和能量的关系式 $E^2 = (cp)^2 + E_0^2$, 并考虑系统碰撞前只有一个粒子以动能 $5m_0c^2$ 在运动, 因此它的总能量为

$$E = E_k + E_0 = 5m_0c^2 + m_0c^2 = 6m_0c^2$$

将运动粒子总能量代入动量和能量关系式可得

$$(6m_0c^2)^2 = (cp)^2 + (m_0c^2)^2$$

$$p = \sqrt{35}m_0c$$

(2) 碰撞前系统的总能量是一个静止粒子的静能和一个运动粒子的动能和静能的总和, 即

$$E_{\text{总}} = m_0 c^2 + 6m_0 c^2 = 7m_0 c^2$$

(3) 碰撞前的动量和能量分别为 $\sqrt{35}m_0 c$ 和 $7m_0 c^2$, 碰撞后的能量为 $\frac{m'_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, 碰撞后的动量可根据能量和动量的关系 $(cp')^2 = E'^2 - E_0'^2$, 得

$$p' = \frac{\sqrt{E'^2 - E_0'^2}}{c}$$

其中 $E' = mc^2 = \frac{m'_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, $E'_0 = m'_0 c^2$, 代入上式可得

$$p' = \frac{m'_0 cv}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

根据动量守恒和能量守恒, 得 $v = \frac{\sqrt{35}}{7}c$ 。

(4) 根据碰撞前后能量守恒 (或者动量守恒也可解), 可得 m'_0 和 m_0 之间的关系为

$$7m_0 c^2 = \frac{m'_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \text{或} \quad m'_0 = \sqrt{14}m_0$$

第 10 章 量子力学基础

量子力学是 20 世纪初在总结大量实验事实和经典量子理论的基础上建立起来的理论。19 世纪末，经典物理学已发展到相当完善的阶段。那时，一般的物理现象都可以从相应的理论中得到解释：对低速物体的机械运动可用牛顿力学理论说明；电磁现象的规律可用麦克斯韦方程描述；光的现象有光的波动理论，最终也可用麦克斯韦方程解释；一般的热现象也有较完整的统计物理学。可以说那时很多物理学家都认为物理学的基本规律已被揭示，今后的任务只是使这些规律进一步的完善，并把物理学的基本定律应用到具体问题的处理上，以及用来说明新的实验工作而已。

但上述这种物理学“最终理论”很快遇到了困惑。1897 年，汤姆孙 (J.J.Thomson) 在对阴极射线实验研究中，发现阴极射线和带负电的粒子在电磁场中走相同的路径。并在进一步的射线粒子荷质比 e/m 的测量中，确定了这种带电粒子与真空管内气体的种类、电极的材料无关。因此，他确定阴极射线是由后来被称之为“电子”的粒子组成。电子的发现揭开了研究原子结构内部的奥秘。但在经典物理中是不能对原子的这种可分性给予正确解释的。1900 年，瑞利 (Rayleigh) 和琼斯 (Jeans) 用经典的能量均分定理来说明热辐射时，也出现了所谓的“紫外灾难”；在光电效应实验中，实验表明，只有当光的频率大于一定值 (截止频率) 时，不管光多微弱，只要光一照射，就有光电子发射出来。如果光的频率低于这个值，则不论光的强度多大，照射时间多长，都没有光电子逸出。光电子的能量只与光的频率有关，而与光的强度无关，光的频率越高，光电子的能量就越大。光的强度只影响光电流强度 (即单位时间从单位面积上逸出的光电子的数目)，强度增大，光电子的数目就增多。光电效应的这些特点，经典物理也无法给出合理的解释。为了解决经典物理所面对的一系列困难，一些物理学家重新思考了物理学中的某些基本概念，在 1900 年普朗克 (M.K.E.L.Planck) 引入量子的概念解释了黑体辐射规律；1913 年，波尔 (Niels Bohr) 在卢瑟福 (E.Rutherford) 原子有核模型的基础上，应用新的量子化概念解释了氢原子光谱的规律性。随后，爱因斯坦 (A.Einstein) 针对光电效应实验与经典物理理论的矛盾，提出了光量子的假设，并在固体比热容问题上成功的应用了量子的概念。在玻尔理论的启发下，1924 年德布罗意 (de Broglie) 在光的波粒二象性的启示下，提出微观粒子也具有波粒二象性的假说之后，不确定关系、量子力学波函数、薛定谔 (Schrödinger) 方程等新理论也随之提出。总之，在 1925 年前后，经大量科学家艰苦而又曲折的努力，终于诞生了量子力学。量子力学诞生后，一些悬而未决的问题很快就得到了解决。

而今，量子力学已成为当代物理学理论中的一大支柱，量子力学有力地推动了科学和技术 (例如：在激光、半导体、超导体、纳米材料、显微镜技术、化学、生物学技术) 的发展。现已证明：对微观高速粒子的研究，牛顿理论已不再适用，必须用新的量子力学理论。

本章从教学基本要求出发，着重介绍经典物理在解释热辐射、光电效应、康普顿

(A.H.Compton) 实验时所遇到的困难; 梳理了本章节中关于普朗克量子假设、德布罗意的物质波假设、爱因斯坦光子假设等知识点; 指出爱因斯坦方程、氢原子模型要点; 介绍了量子力学理论的两个重要实验夫兰克-赫兹实验、戴维孙(C.J.Davisson)-革末(L.H.Germer)实验; 梳理了描述微观粒子运动的基本概念和规律的波函数、薛定谔方程、量子力学的基本原理、氢原子的量子力学处理方法中的重、难点等内容, 并通过精选例题、习题的分析和解答给出相应的学习指导。

10.1 学习要求

1. 经典物理的困惑

(1) 了解经典物理在解释热辐射、黑体、能量子、光子等基本概念及其物理意义; 了解热辐射的两条基本定律(斯特藩(J.Stefan)-玻尔兹曼、维恩(W.Wein)位移定律); 理解普朗克量子假设的内容和意义。

(2) 了解光电效应、康普顿实验时所遇到的困难; 掌握德布罗意的物质波假设及实物粒子的波粒二象性; 掌握描述物质波动性的物理量(波长、频率)及粒子性的物理量(动量、能量)之间的关系; 掌握爱因斯坦光子假设及爱因斯坦方程, 了解戴维孙-革末实验。

(3) 了解玻尔的氢原子模型; 理解氢原子光谱的实验规律及玻尔的氢原子理论。了解夫兰克-赫兹实验。

2. 量子物理基本原理

(1) 理解波函数的统计诠释, 态叠加原理, 量子力学中的基本方程——薛定谔方程。

(2) 了解量子力学中力学量用算符表示假设。

(3) 理解海森堡(W.Heisenberg)的不确定关系。

3. 一维定态薛定谔方程的应用及量子力学中的其他问题

(1) 了解一维定态薛定谔方程及其在处理一维无限深势阱等物理问题的基本方法。

(2) 理解氢原子的能量和角动量的量子化, 以及原子中电子状态按 4 个量子数的分布规律。了解泡利(Pauli)不相容原理和原子的电子壳层结构。

(3) 了解电子自旋, 施特恩-盖拉赫实验; 理解元素周期表。

10.2 内容提要

1. 基本概念

(1) 黑体热辐射

黑体辐射问题所研究的是辐射与周围物体处于平衡状态时的能量按波长(或频率)的分布。

如果一个物体能全部吸收投射在它上面的辐射而无反射, 这种物体就称为绝对黑体, 简称黑体, 它是一种理想模型, 一个空腔上的小孔可以近似看作黑体。

实验发现: 热平衡时, 空腔辐射的能量密度 (或称辐出度, 常用 $M(T)$ 表示, 单位为 $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) 与辐射的波长 (λ) 的分布曲线, 其形状和位置只与黑体的热力学温度 T 有关, 即

$$M(T) = \int_0^{\infty} M_{\lambda}(T) d\lambda \quad (10-1)$$

实验分布曲线如图 10.1 所示。进一步实验指出, 在相同温度下, 不同物体, 特别是物体表面 (粗糙程度) 不同时, $M_{\lambda}(T)$ 的量值是不同的, 相应 $M(T)$ 的量值也不同。图 10.1 中曲线下的面积等于黑体在一定温度下的总辐出度。

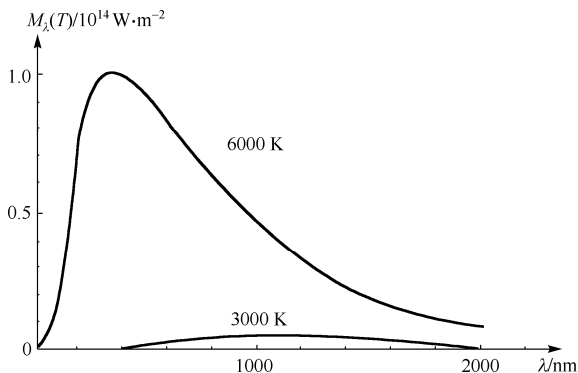


图 10.1 黑体的辐出度按波长分布曲线

根据黑体辐出度按波长的实验分布曲线及热力学理论导出的两条实验定律:

① 斯特藩-玻尔兹曼定律: 单位时间内单位表面积辐射出的电磁波能量 (也称黑体辐出度) 随热力学温度 T 的分布关系为

$$M(T) = \sigma T^4 \quad (10-2)$$

这一结果只适用于黑体, σ 为斯特藩-玻尔兹曼常量, 它与构成黑体的材料无关, 实验测得其值为

$$\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

② 维恩位移定律: 图 10.1 中 $M_{\lambda}(T) \sim \lambda$ 曲线的峰值对应的波长 λ_m 随温度 T 的升高, 向短波方向移动, 两者间的关系为

$$T \lambda_m = b \quad (10-3)$$

由实验测得式中 $b = 2.897 \times 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}$, 称为维恩常量。

1893 年维恩假设黑体辐射能谱分布与麦克斯韦分子速率分布类似, 得出维恩公式

$$E(\nu) d\nu = c_1 \nu^3 e^{-c_2 \nu / T} d\nu \quad (10-4)$$

式中, c_1 、 c_2 为常量, $E(\nu) d\nu$ 为辐射能量密度。维恩公式在短波部分与实验相符合, 在长波部分则明显不一致, 如图 10.2 所示。

瑞利-琼斯公式为

$$E(\nu) d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (10-5)$$

式中, c 为光在真空中的速度, k 为玻尔兹曼常数。该理论是 1900 年至 1905 年瑞利-琼斯把统计物理学中的能量按自由度均分定理应用到电磁辐射而得到的。该理论只在波长很长处与实验曲线较接近, 在短波紫外光区也与实验极不相符, 这就是历史上所谓的“紫外灾难”。“紫外灾难”的出现及经典物理对光电效应解释的困难, 使经典物理遇到了严峻的挑战。

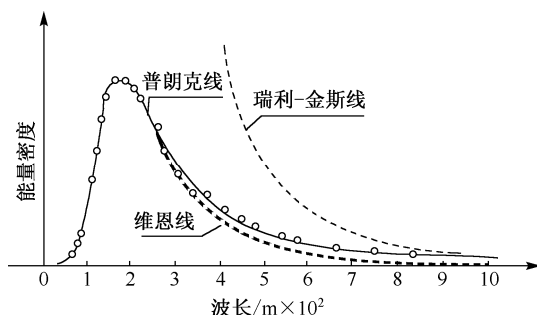


图 10.2 黑体辐射能量分布曲线

(2) 普朗克量子假设和普朗克公式

为了解决经典物理不能解释黑体辐射的困难, 普朗克在 1900 年引入了量子假设概念。

普朗克假设: 对一定频率 ν 的辐射, 物体只能以 $h\nu$ 为能量单位不连续地发射和吸收频率为 ν 的辐射, 即

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$$

$h\nu$ 称为能量子, h 为普朗克常数, 它的最新测量值是 $h = 6.626\,069\,3(11) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。换言之, 物体吸收或发射电磁辐射, 只能以“量子”的方式进行, 每个“量子”的能量为 $h\nu$ (或 $\hbar\omega$), 其中 $\hbar = h/2\pi$, 而不是像经典物理那样可以连续地发射和吸收能量。

基于以上量子假设, 普朗克利用热力学和统计物理理论导出了与实验结果相符的黑体辐射公式

$$M(T)d\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (10-6)$$

式中, $M(T)d\nu$ 是黑体内频率在 ν 到 $\nu+d\nu$ 之间的辐射能量密度, c 是光速, k 是玻尔兹曼常量, T 是黑体热力学温度。这一公式称为普朗克公式。普朗克公式能很好地与实验相吻合, 如图 10.2 所示普朗克线。

注意: ①由普朗克公式还可以推得由实验得出的斯特藩-玻尔兹曼定律[见式 (10-2)]和维恩位移定律[见式 (10-3)]; ②由普朗克公式还可求得在极限时的瑞利-琼斯公式[见式 (10-5)]和维恩公式[见式 (10-4)]。

普朗克的量子假设与经典物理学的概念格格不入, 从经典物理学来看, 能量子的假设

是荒诞的、不可思议的。直到 1905 年爱因斯坦在普朗克量子假设基础上,提出光量子概念,正确地解释了光电效应后,普朗克量子假设概念才被人们逐渐接受。

(3) 光电效应

光电效应是光照射到金属上时,有电子从金属中逸出的现象。逸出电子称为光电子。

实验证明:①只有当光的频率 ν 大于某一定值 ν_0 (截止频率) 时,才有光电子发射出来;②如果光的频率低于这个值时 ($\nu < \nu_0$), 则不论光的强度多大,照射时间多长,都没有光电子产生;③光电子的能量只与光的频率有关,而与光的强度无关,光的频率越高,光电子的能量就越大。光的强度只影响光电子的数目,强度增大,光电子的数目就增多;光电效应具有瞬时性。

经典理论在解释光电效应时所遇到的困难:①经典理论无法说明光电效应为何会存在截止频率,光电子的初动能为何与频率成正比,而与光强无关;②由于能量可以积累,那么无论照射光强多弱,只要用足够长时间照射金属表面,总会有光电子逸出,但事实上,观察不到这种现象,经典理论也无法解释。

1905 年,爱因斯坦为了摆脱经典理论解释光电效应所遇到的困难,大胆提出假设:光由以光速 c 运动的光量子(或光子)组成。频率为 ν 的光,其光量子的能量为

$$\varepsilon = h\nu \quad (10-7)$$

根据爱因斯坦假设,当光照射到金属表面上时,光子能量被电子所吸收,电子将能量的一部分用来克服逸出金属表面需要做的功 W_0 , 另一部分就是电子离开金属表面后的动能,即

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = h\nu - W_0 \quad (10-8)$$

式(10-8)称为爱因斯坦光电方程。式中 $h\nu$ 是入射光子的能量, μ 是电子的质量, v 是电子逃脱出金属表面后的速度, W_0 是电子逃脱出金属表面所需要做的功,称为脱出功或逸出功。由光电方程就可以解释光电效应的实验结果。 $h\nu > W_0$ 时,电子才具有初动能,它才能逸出金属表面;而当 $h\nu \leq W_0$ 时,电子不具有初动能,所以恰能产生光电效应入射光的频率为

$$\nu_0 = \frac{W_0}{h}$$

ν_0 称为截止频率,不同金属的 W_0 不同,故截止频率也不同;只要入射光的频率 $\nu > \nu_0$, 由光电方程知,电子初动能 $\frac{1}{2}\mu v^2$ 总是大于零,这时不管光强度多弱,总有光电流产生;光的频率决定光子的能量,光的强度只决定光子的数目,光子多,产生的光电子也多。这一结论是经典物理所不能解释的。

(4) 康普顿效应

1922 年,康普顿在研究 X 射线通过石墨等物质而产生的现象时,发现了 X 射线被轻元素中的电子散射后,波长随散射角增大而增大。

如图 10.3 所示,设入射光子的能量、动量分别为 E 、 p , X 射线波长为 λ ; 电子初动量为 0, 初始能量为 $m_0 c^2$ 。散射后,设光子沿 θ 方向射出,波长变为 λ' , 能量和动量变为

E' 、 p' ；电子的反冲角设为 φ ，能量、动量变为 E_e 、 p_e 。按照相对论力学，对散射过程应用能量守恒定律、动量守恒定律，最后可以计算出 X 射线经过散射后，波长的改变 $(\lambda' - \lambda)$ ，即

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (10-9)$$

从上可见，波长的改变 $(\lambda' - \lambda)$ 与散射角 θ 有关，并正比于 $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ （称为康普顿波长），其值为

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2.426\ 310 \times 10^{-12} \text{ m}$$

式 (10-9) 由康普顿首先得出，由康普顿和我国物理学家吴有训用实验证实。这一结论若根据经典电动力学，电磁波被散射后波长不应改变。但是把这个过程看作是光子与电子碰撞的过程，则康普顿效应就可以得到完满的解释。

(5) 光的波粒二象性与德布罗意的物质波假设

光子不仅具有能量 ε ，而且还具有一般粒子共有的质量 m_ϕ 和动量 p 等特性，其与光的频率 ν 、波长 λ 的关系为

$$\varepsilon = h\nu, \quad m_\phi = \varepsilon / c^2 = h\nu / c^2, \quad p = \frac{h\nu}{c} \mathbf{n} \left(= \frac{h}{\lambda} \mathbf{n} = \hbar \mathbf{k} \right) \quad (10-10)$$

式中， \mathbf{n} 表示沿光子运动方向的单位矢量， $\omega = 2\pi\nu$ 表示角频率， $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$ 称为波矢，

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054\ 571\ 686(18) \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 是量子力学中常用符号，也称为约化普朗克常量。

光子与带电粒子作用过程中遵守能量守恒定律和动量守恒定律，并且动量也是量子化的。总之，光电效应和康普顿效应表明，光在与物质发生相互作用时表现为粒子性；而光的干涉和衍射则又表明光在传播过程中表现为波动性。所以光具有波粒二象性，这才是光的本性。

1924 年德布罗意在光有波粒二象性的启示下，提出了微观粒子也具有波粒二象性的假说。他认为在对光的研究上，只重视光的波动性而忽略了光的粒子性。但在对实体的研究上，又过分重视实体的粒子性而忽略了实体的波动性。因此，他提出了实物粒子具有波动性的假说。德布罗意把粒子和波通过下面的关系式联系起来，即粒子的能量 E 、动量 p 与频率 ν 、波长 λ 之间的关系为

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (10-11)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \mathbf{n} = \hbar \mathbf{k} \quad (10-12)$$

式 (10-11) 与式 (10-12) 称为德布罗意公式，或德布罗意关系。这正是物质波动性的物理量（波长、频率）及粒子性的物理量（动量、能量）之间的关系。

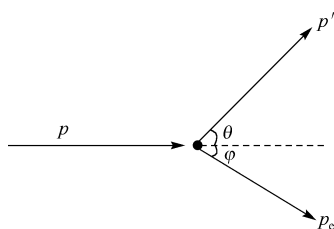


图 10.3 康普顿散射

(6) 玻尔的氢原子模型

① 氢原子光谱的规律性

1889 年, 里德伯 (Rydberg) 在巴耳末 (Balmer) 工作的基础上提出了与实验吻合的氢原子光谱公式

$$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \begin{matrix} k = 1, 2, 3, \dots \\ n = k + 1, k + 2, k + 3, \dots \end{matrix} \quad (10-13)$$

该式称为里德伯方程, 由实验测得 $R = 1.0973731 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, 称为里德伯常数, $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ 为波数。可见原子的光谱线是有规律的。

② 原子的核结构模型与玻尔的氢原子理论

根据实验结果, 卢瑟福认为: 原子的结构犹如太阳系中的行星绕太阳运动一样, 正电荷位于球心, 电子像行星一样, 围绕正电荷运动。处于球心的正电荷称为原子核。所以, 卢瑟福的模型称为原子行星模型。

根据上述卢瑟福原子的核结构模型, 电子在原子中绕核转动, 这种加速运动着的电子应向外发射电磁波, 它的频率等于电子绕核运动的频率。由于能量辐射, 原子系统的能量就会不断减小, 频率也将逐渐改变, 因而所发射的光谱应该是连续的。同时由于能量的减少, 电子将沿螺线运动逐渐接近原子核, 最后落在核上。因此, 按经典理论, 卢瑟福的核结构模型就不可能是稳定的系统。

1913 年, 玻尔为了解决上述困难, 在卢瑟福的核结构模型基础上, 把量子化概念应用到原子系统, 并结合里兹 (Ritz) 组合原理提出 3 个基本假设:

a) 定态假设, 即原子系统只能处在一系列不连续的能量状态, 在这些状态中, 虽然电子绕核做加速运动, 但不辐射也不吸收电磁波, 这些状态称为原子系统的稳定状态或定态, 相应的能量分别为 E_1, E_2, E_3, \dots ($E_1 < E_2 < E_3 < \dots$)。

b) 频率条件, 即当原子从一个能量为 E_n 的定态跃迁到另一能量为 E_k 的定态时, 就要发射或吸收一个频率为 ν_{kn} 的光子, 光子频率为

$$\nu_{kn} = \frac{|E_k - E_n|}{h} \quad (10-14)$$

式中, h 是普朗克常量, $E_k - E_n > 0$ 时吸收光子, $E_k - E_n < 0$ 时发射光子。式 (10-14) 称为玻尔频率条件。

c) 量子化条件, 即在电子绕核做圆周运动时, 其稳定状态必须满足电子的角动量 L 等于 $\frac{h}{2\pi}$ 的整数倍的条件, 即

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10-15)$$

式中, n 为正整数, 称为量子数, 式 (10-15) 称为角动量量子化条件。

说明:

a) 定态假设是针对氢原子核结构模型与经典电磁理论的矛盾而提出的。由于氢原子结构的稳定性, 只有假定电子在圆轨道上运动时不辐射, 才能保证原子的稳定性。

b) 频率条件假设指出, 辐射光的条件及能量的守恒。

c) 量子化条件则指出, 电子绕核运动的圆轨道是有限制的, 只有满足电子的角动量 L 等于 $\hbar/2\pi$ 这样一个量子化条件才是许可的, 这是普朗克能量量子化的进一步发展, 提出了角动量量子化。

③ 不确定关系

在经典力学中通常用质点的坐标和运动 (或速度) 的值来描述质点状态。质点的其他力学量, 比如能量等是坐标和动量的函数, 当坐标和动量确定之后, 其他力学量就确定了。但在量子力学中, 不可能同时用粒子坐标和动量的确定值来描述粒子的量子状态, 因为粒子具有波粒二象性, 故粒子的坐标和动量不可能同时具有确定值。

1927 年德国物理学家海森堡分析了若干典型实验后指出, 微观粒子的位置和动量不可能同时予以精确测定, 而只能确定到 (在数量级的意义上)

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad (10-16)$$

的程度 (由量子力学推出的严格的定量结果是: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$)。事实上, 该式只规定了 $\Delta x \cdot \Delta p$ 的下限, 并未规定出上限。对很多典型定态问题的计算结果表明, 多数问题的基态, $\Delta x \cdot \Delta p$ 接近于 \hbar , 而对于高激发态, $\Delta x \cdot \Delta p$ 的值可能很大。例如, 一维谐振子的基态 ψ_0 , $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ 刚好为下限; 对于 ψ_n 态, $\Delta x \cdot \Delta p = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar$ 。

不确定关系集中反映了量子力学规律的特点, 规定了经典力学 “轨道” 概念的适用限度。例如, 经典力学认为质点有绝对静止状态, 位置完全确定 $\Delta x = 0$, 动量 $\Delta p = 0$ 。而按照不确定关系, 这种经典静止是不可能的。实验事实正是这样, 粒子位置越确定 (Δx 小), 动量的涨落 Δp 就越大, 动能的数值也越大。因此, 不确定关系告诉我们, 在任何时刻粒子的 Δx 与 Δp 之积不小于 $\hbar/2$, 这就从根本上否定了轨道运动的概念。但物体 (如电子) 在宏观尺度上运动时, 虽有不確定关系限制, 如果 Δx 与 Δp 实际上都很小, 则轨道概念仍可近似成立, 实例可见习题 10.4。

2. 量子力学的基本原理

(1) 量子力学的第一个基本假设是用波函数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 描述微观粒子的运动状态, 由 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 可以得知状态的全部物理性质。所以, $\psi(\mathbf{r}, t)$ 也称为态函数。

(2) 量子力学的另一个基本假设是, 描述运动状态的波函数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 满足薛定谔方程。若粒子在力场中的势能为 $V(\mathbf{r})$, 则薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r})\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (10-17a)$$

式中 m 为粒子的质量。令 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r})$ (称为哈密顿算符), 则式 (10-17a) 改写为

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (10-17b)$$

这是薛定谔方程的普遍形式。薛定谔方程是微观粒子运动状态随时间变化规律的数学描述。由于它是时间 t 的一阶微分方程, 因此, 只需要给定初始时刻 t_0 的波函数 $\psi(\mathbf{r}, t_0)$, 就可以求出任意时刻 t 的波函数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 。这正是微观领域因果性的表现形式。薛定谔方程保证粒子的空间分布总概率守恒, 亦即保证粒子数守恒。

(3) 量子力学中力学量用算符表示。在理论计算中, 力学量(实验上的可观测量)可以用一个算符(算子)来表示, 这是经典物理中所没有的新概念。式(10-17a)中, 令

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})$$

这里 \hat{H} 是一个能量算符。广义上说: 算符是指作用在一个函数上得出另一个函数的运算符号, 某种运算把一个函数 u 变成另一个函数 v , 用符号表示为

$$\hat{F}u = v$$

则这种运算的表示符号 \hat{F} 就是算符。量子力学中的力学量可以从经典力学量的类比中得到, 凡是有经典力学对应的力学量, 相应的算符根据下面对应关系得出

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla \quad (10-18)$$

因此, 纯粹是坐标(位置)的函数的那些经典力学量, 其量子力学对应算符仍是坐标的函数, 例如势能 $V(\mathbf{r})$, 作用力表示为 $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \nabla V(\mathbf{r})$ 。

经典力学中最重要力学量, 比如位置 \mathbf{r} 、动量 \mathbf{p} 、速度 $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}$ 、作用力、势能 $V(\mathbf{r})$ 、

动能 $T = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$ 、角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 、总能量(哈密顿量) $H = T + V$ 等, 它们相应的算符表示为

$$\text{动能算符} \quad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$\text{角动量算符} \quad \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\mathbf{r} \times \nabla$$

角动量算符在直角坐标系中的表示

$$\hat{L}_x = (y\hat{p}_z - z\hat{p}_y) = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\hat{L}_y = (z\hat{p}_x - x\hat{p}_z) = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\hat{L}_z = (x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

容易计算

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

哈密顿量算符

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

3. 波函数及波函数的统计解释

(1) 波函数

为了解释波和它所描述的粒子之间的关系,引入了描述微观粒子状态的波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 。不同粒子或同一粒子在不同状态,波函数的形式不同,通常波函数都用复数表示。对于具有能量 E 和动量 p 的沿 x 轴运动的自由粒子,其波函数为

$$\Psi(x, t) = \psi_0 e^{-i\frac{2\pi}{h}(Et - px)} \quad (10-19)$$

式 (10-19) 便是描述自由粒子的德布罗意波方程。可将上式写成 $\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t)$, 其中

$\psi(x) = \psi_0 e^{i\frac{2\pi}{h}px}$ 称为定态波函数。

(2) 波函数的统计解释

① 波函数在空间中某点的强度 (振幅绝对值的平方) 和在该点找到粒子的几率成比例。用数学形式表示为

$$dP = |\psi|^2 dV \quad (10-20)$$

也就是说,描述粒子的波是几率波,即由波函数的振幅的平方可以得出粒子在空间 dV 任一点出现的几率 dP 。由波函数还可以得出体系的各种性质,因此说波函数可描述体系的量子状态 (简称状态或态)。

由于粒子必定要在空间中的某一点出现,所以粒子在空间各点出现的概率总和等于 1, 即

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1 \quad (10-21)$$

满足上式的波函数称为归一化函数,也称为归一化条件。

② 如果 ψ_1 和 ψ_2 是某一体系的可能状态,那么它们的线性叠加

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \quad (c_1、c_2 \text{ 是复数}) \quad (10-22)$$

也是该体系的一个可能状态,这就是量子力学的态叠加原理。这个关系也可理解为,当粒子处于态 ψ_1 和态 ψ_2 的线性叠加态 ψ 时,粒子是既处在态 ψ_1 , 又处在态 ψ_2 。当一粒子处于以波函数 ψ 所描述的量子状态时,粒子的力学量,如坐标、动量等一般可以有許多可能值,每个可能值各自以一定的概率出现。例如,粒子处于小体积 dV 中的几率为 $|\psi|^2 dV$ 。同样,粒子的动量为 p 的几率也可由波函数给出,这就是波函数的统计解释。

③ 薛定谔方程

波函数满足的方程叫薛定谔方程。该方程满足 3 个条件: a) 波函数所满足的方程只能含有 ψ 对时间的一阶导数; b) 方程应是线性的; c) 方程不能包含状态参量,如 p 、 E 等。一维运动自由粒子含时薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (10-23)$$

一维定态 (与时间无关的状态) 薛定谔方程为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0 \quad (10-24)$$

式中, E 和 U 分别是粒子的总能量和势能。粒子在三维空间运动, 定态薛定谔方程为

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0 \quad (10-25)$$

求解式(10-25)定态波函数时, 要求 ψ 是连续、单值、有限, 且为归一化的函数, 由于有这些条件的限制, 所以只有当薛定谔方程中的能量 E 具有某些特定值时才有解, 这些特定的能量值称为能量本征值, 而相应的波函数则称为本征波函数, 本征波函数由具体问题中波函数应满足的条件得出。

4. 电子自旋、原子的电子壳层结构与元素周期表

(1) 旋特恩(O.Stern)–格拉赫(W.Gerlach)实验

如果原子磁矩在空间的取向是连续的, 那么原子束经过不均匀磁场发生偏转后, 将在照相底板上得到连续一片的原子沉积; 如果原子磁矩在空间取向是分立的, 那么原子束经过不均匀磁场偏转后, 在底板上得到分立的原子沉积。实验证明: 原子束通过狭缝形成很细的一束原子射线, 在不加磁场时该射线在底板上沉积成一条正对狭缝的沉积痕迹, 在加均匀磁场时该射线在底板上分裂为正对狭缝的上下对称的两条沉积痕迹。这一现象证实了原子具有磁矩且磁矩在外磁场中只有两种取向, 即空间取向是量子化的。

1925年, 乌伦贝(G.E.Uhlenbeck)和古德斯密特(S.A.Goudsmit)提出了电子自旋的假说, 认为电子除轨道运动外, 还存在着一种固有的自旋运动, 且具有自旋角动量 S 以及相应的自旋磁矩 μ 。电子的自旋磁矩与自旋角动量成正比, 且方向相反。

电子绕自身轴线旋转, 其自旋角动量为

$$S = \sqrt{s(s+1)} \frac{h}{2\pi} \quad (10-26)$$

在外磁场方向的分量为

$$S_z = m_s \frac{h}{2\pi} \quad (10-27)$$

以上两式中, $s = \frac{1}{2}$ 为自旋量子数, $m_s = \pm \frac{1}{2}$ 为自旋磁量子数。

(2) 原子的电子壳层结构

原子中电子的状态由下列4个量子数确定:

- ① 主量子数 n , $n = 1, 2, 3, \dots$ 。
- ② 角量子数 l , $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 。角量子数决定电子绕核运动的轨道角动量。
- ③ 磁量子数 m_l , $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ 。磁量子数决定电子绕核运动的角动量矢量 L 在外磁场方向上的分量 L_z 。

④ 自旋磁量子数 $m_s = \pm \frac{1}{2}$ 。自旋量子数决定电子自旋角动量矢量 S 在外磁场方向上的分量 S_z 。

上述 4 个量子数可用来标志原子的状态, 一组 (n, l, m_l, m_s) 就可确定原子的一个状态。电子在原子中的分布遵从以下两个原理:

① 泡利不相容原理, 即在一个原子系统内, 不可能有两个或两个以上的电子具有相同的状态, 亦即不可能具有相同的 4 个量子数。

由泡利不相容原理可知, 对应于主量子数 n (即能级 E_n), 共有

$$Z_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 \quad (10-28)$$

个状态。

② 能量最小原理, 即原子系统处于正常状态时, 每个电子趋向于占有最低能级。

10.3 重点难点分析

1. 本章重点

本章重点知识有经典物理在解释热辐射、光电效应、康普顿实验时所遇到的困难; 普朗克量子假设、德布罗意的物质波假设、爱因斯坦光子假设、实物粒子的波粒二象性、不确定关系等知识点; 描述微观粒子运动的基本概念和规律的波函数、薛定谔方程, 量子力学的基本原理、氢原子的量子力学处理方法等内容; 与量子力学理论相关的重要实验也是本章中的重要知识点。

2. 本章难点

在本章中的知识难点有波函数、薛定谔方程、不确定关系、力学量算符的本征方程等知识, 求解一维无限深势阱、一维势垒等问题中的基本方法, 氢原子的量子力学处理方法等内容相对较难。

10.4 精选例题与习题解答

1. 精选例题

例 10-1 试将普朗克公式的频率表示 $M_\nu(T)$ 换算到波长表示 $M_\lambda(T)$ 。

分析: 根据式 (10-1), 温度为 T 的黑体, 在波长为 λ 到 $\lambda + d\lambda$ 范围内, 单位时间单位面积的辐射能为 $M_\lambda(T)d\lambda$, 若以频率表示, 则在频率为 ν 到 $\nu + d\nu$ 范围内, 单位时间单位面积的辐射能为 $M_\nu(T)d\nu$, 显然, 这两种表示的能量应相等。

解: 因为 $M_\lambda(T)d\lambda = -M_\nu(T)d\nu$, 式中负号表示 $d\lambda$ 与 $d\nu$ 的正负号相反。当 $d\lambda$ 为正时, $d\nu$ 为负, 反之亦然。又由 $\nu = \frac{c}{\lambda}$, 得

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$$

并将式 (10-6) 代入, 所以有

$$\begin{aligned}
 M_\lambda(T) d\lambda &= -M_\nu(T) d\nu = M_\nu(T) \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \frac{c}{\lambda^2} d\lambda \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{h \frac{c}{\lambda}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \frac{c}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \frac{h}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda
 \end{aligned}$$

例 10-2 求温度为 27°C 时, 对应于最概然速率的氧分子的德布罗意波长。

分析: 可把温度为 27°C 时的氧分子视为理想气体, 于是有最概然速率

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 394.7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

解: v_p 对应的德布罗意波长为 $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv_p} = \frac{hN_A}{Mv_p}$, 式中, m 为氧分子质量, N_A 为阿

伏加德罗常数, 将其代入则有

$$\lambda = \frac{hN_A}{Mv_p} = 3.16 \times 10^{-11} \text{ m}$$

例 10-3 金属钾的逸出功为 2.00 eV, 求: (1) 光电效应的红限频率和红限波长; (2) 如果入射光波长为 300 nm, 求遏止电压。

分析: (1) 逸出功 W 表示了产生光电效应至少需要获得的能量, 而光子的能量为 $h\nu$, 由此可以确定产生光电效应至少需要的入射光子的频率 (红限频率) 或波长 (红限波长); (2) 入射光子的能量一部分用于逸出功 W , 另一部分用于增加光电子的初动能, 遏止电压的大小反映了光电子的最大初动能, 因此可以由光电子的最大初动能来确定遏止电压。

解: (1) 已知逸出功 $W = 2.00 \text{ eV}$, 则红限频率和红限波长分别为

$$\begin{aligned}
 \nu_0 &= \frac{W}{h} = \frac{2.00 \times 1.602 \times 10^{-19}}{6.626 \times 10^{-34}} = 4.84 \times 10^{14} \text{ Hz} \\
 \lambda_0 &= \frac{c}{\nu_0} = \frac{3.00 \times 10^8}{4.84 \times 10^{14}} = 620 \text{ nm}
 \end{aligned}$$

(2) 入射光的频率

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8}{300 \times 10^{-9}} = 1.0 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

由爱因斯坦方程

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + W$$

光电子的最大动能刚好能克服遏止电压做功而形成光电流, 因此有关系式

$$eV_\varepsilon = \frac{1}{2}mv_m^2$$

比较以上两式, 可得

$$V_\varepsilon = \frac{h\nu - W}{e} = \frac{6.62 \times 10^{-34} \times 1.0 \times 10^{15} - 2.00 \times 1.602 \times 10^{-19}}{1.602 \times 10^{-19}} = 2.14 \text{ V}$$

例 10-4 试确定氢原子的 K 壳层中, 电子可能具有的量子数 (n, l, m_l, m_s) 。

分析与解: 由泡利不相容原理知, 原子内电子状态由四个量子数 (n, l, m_l, m_s) 确定。在一个原子系统内, 不可能有两个或两个以上的电子具有相同的状态, 亦即不可能有相同的四个量子数。当电子处于 K 壳层时, 主量子数 $n=1$, 而角量子数 $l=0, 1, 2, \dots, (n-1)$, 即只能是 $l=0$; 磁量子数 $m_l=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, 故 $m_l=0$; 自旋量子数 $m_s=\pm \frac{1}{2}$ 。所以电子可能具有的量子数为 $n=1, l=0, m_l=0, m_s=\pm \frac{1}{2}$ 。

例 10-5 设一维无限深势阱的势能分布为

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a & \text{阱内} \\ \infty, & x \leq 0, x \geq a & \text{阱外} \end{cases}$$

试求在该一维无限深势阱中粒子概率密度的最大值的位置。

分析: 由于势能不显含时间, 可由定态薛定谔方程求解粒子在一维无限深势阱中粒子的运动。考虑到势能是分段的, 因而列方程求解也需分阱内、外两个区间进行。求得波函数后, 再由波函数的统计意义, 求出一维无限深势阱中粒子概率密度, 并讨论概率密度最大值的位置。

解: 在阱外, 设波函数为 ψ_e , 定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2 \psi_e}{dx^2} + (E+U)\psi_e = 0$$

由于 $U \rightarrow \infty$, 对于 E 为有限值的粒子, 要使上述方程成立, 唯有 $\psi_e = 0$ 。

在阱内, 设波函数为 ψ_i , 定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2 \psi_i}{dx^2} + E\psi_i = 0$$

解此薛定谔方程, 得定态波函数为

$$\psi_i = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

得最后波函数为

$$\begin{cases} \Psi_e(x, t) = 0 \\ \Psi_i(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \end{cases}$$

所以, 一维无限深势阱中粒子概率密度为

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi}{a} x, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

将上式对 x 求一阶导数, 并令它等于零

$$\left. \frac{d|\psi_n(x)|^2}{dx} \right|_{x=0} = \frac{4n\pi}{a^2} \sin^2 \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{a} x = 0$$

因为在阱内, 即 $0 < x < a$, $\sin \frac{n\pi}{a} x \neq 0$, 只有

$$\cos \frac{n\pi}{a} x = 0$$

于是

$$\frac{n\pi}{a} x = (2N+1) \frac{\pi}{2}, \quad N = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

由此解得最大值的位置为

$$x = (2N+1) \frac{a}{2n} \quad N = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

例如

$$n=1, \quad N=0 \quad \text{最大值位置 } x = \frac{1}{2}a$$

$$n=2, \quad N=0, 1 \quad \text{最大值位置 } x = \frac{a}{4}, \frac{3}{4}a$$

$$n=3, \quad N=0, 1, 2 \quad \text{最大值位置 } x = \frac{1}{6}a, \frac{3}{6}a, \frac{5}{6}a$$

可见, 概率密度最大值的数目和量子数 n 相等。

相邻两个最大值间的距离 $\Delta x = \frac{a}{n}$ 。如果阱宽 a 不变, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$ 。这时最大值连成一片, 峰状结构消失, 概率分布变为均匀分布, 与经典理论的结论趋于一致。

例 10-6 设康普顿效应中入射的 X 射线的波长 $\lambda = 0.0700 \text{ nm}$, 散射的 X 射线与入射线垂直, 求: (1) 反冲电子的动能 E_k ; (2) 反冲电子的运动方向与入射的 X 射线之间的夹角。
(普朗克常量 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, 电子的静止质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 。)

分析: 已知散射线与入射线垂直, 亦即散射角 $\theta = 90^\circ$, 可由式 (10-9) 求得散射线的波长, 从而可求出反冲电子的动能; 根据动量守恒定律及矢量关系, 可求出反冲电子的运动方向与入射的 X 射线之间的夹角 ϕ 。

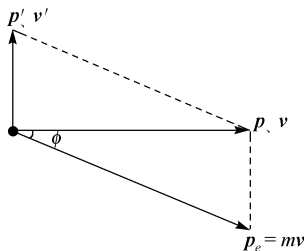


图 10.4 例 10-6 图

解: 如图 10.4 所示, 令 p 、 ν 和 p' 、 ν' 分别为入射与散射光子的动量和频率, mv 为反冲电子的动量。由康普顿散射公式, 考虑 $\cos \theta = \cos 90^\circ = 0$, 有

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} = 0.724 \times 10^{-10} \text{ m}$$

(1) 由于反冲电子的动能等于光子失去的能量, 即

$$E_k = h\nu - h\nu' = \frac{hc(\lambda' - \lambda)}{\lambda'\lambda} = 9.42 \times 10^{-17} \text{ J}$$

(2) 又根据动量守恒定律, 散射前后动量守恒 $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$, 且有如图所示的矢量关系, 即

$$(mv)^2 = p^2 + p'^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2, \text{ 所以反冲电子的运动方向与入射的 X 射线之间的夹角 } \phi \text{ 为}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{h/\lambda'}{h/\lambda}\right) = \arctan(\lambda/\lambda') = 44.03^\circ$$

2. 习题解答

10.1 光电效应和康普顿效应都包含电子和光子的相互作用过程。对此, 有以下几种理解, 正确的是 ()。

- (A) 两种效应中, 电子和光子组成的系统都服从动量守恒定律和能量守恒定律
- (B) 两种效应都相当于电子和光子的弹性碰撞过程
- (C) 两种效应都属于电子吸收光子的过程
- (D) 光电效应是电子吸收光子的过程, 而康普顿效应则相当于光子和电子的弹性碰撞过程

分析与解: 光电效应是电子吸收光子的过程, 而康普顿效应则相当于光子和电子的弹性碰撞过程。所以正确选项为 D。

10.2 氢原子中处于 3d 量子态的电子, 描述其量子态的 4 个量子数 (n, l, m_l, m_s) 可能取的值为 ()。

- (A) (3, 1, 1, 1/2) (B) (3, 2, 0, 1/2) (C) (2, 1, 2, 1/2) (D) (1, 0, 1, 1/2)

分析与解: 由泡利原理: 在一个原子系统内, 不可能有两个或两个以上的电子具有相同的状态, 亦即不可能具有相同的 4 个量子数。对处于 3d 量子态的电子, $n=3$, $l=2$, 那么此时对于 (A) 选项, 角量子数不满足, 而 (B) 选项满足主量子数与角量子数, (C) 和 (D) 选项主量子数与角量子数不满足, 而当量子数 $l=2$ 确定后, $m_l = -2, -1, 0, 1, 2$, 即 $m_l = 0$ 是可能的状态。 $m_s = \pm(1/2)$, 故只有 (B) 选项是可能量子态。

10.3 关于不确定关系 $\Delta x \Delta p \geq h$, 以下几种理解, 正确的是 ()。

- (A) 粒子的动量不能准确确定
- (B) 粒子的动量和坐标不能同时准确确定
- (C) 粒子的坐标不能准确确定
- (D) 不确定关系仅适用于微观粒子, 不适用于宏观粒子

分析与解: 海森堡根据量子力学推出微观粒子在位置与动量两者之间的关系满足 $\Delta x \Delta p \geq h$ (在一维情形), 它的物理意义是, 微观粒子不可能同时具有确定的坐标和相应的动量。粒子坐标的不确定量 Δx 越小, 动量的不确定量 Δp 就越大, 反之亦然。所以正确的应该是 B 答案。

10.4 电子在宏观尺度上运动, x 的量级为厘米, 若 $\Delta x \sim 10^{-4} \text{ cm}$, 这时电子的运动是否可用经典力学来处理; 又若电子在原子范围内运动, 这时电子的运动是否可用经典力学来处理?

分析: 电子在宏观尺度上运动, x 的量级为厘米, 若 $\Delta x \sim 10^{-4} \text{ cm}$, 可由不确定关系确定出 Δp 的下限, 再估算动量 p , 比较 p 与 Δp_x , 如果 Δp_x 很小可忽略, 则轨道概念近似成立, 此时电子的宏观运动可用经典力学来处理。同理, 分析电子在原子范围内运动。

解: 电子在宏观尺度上运动, x 的量级为厘米, 若 $\Delta x \sim 10^{-4} \text{ cm}$ (这时也是不易观察到的), 由不确定性关系, 可得 Δp_x 的下限为

$$\Delta p_x \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \sim 10^{28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

如果电子的动能等于 1 eV , 则动量等于

$$p = \sqrt{2m_e E} \sim 5.4 \times 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

可见 Δp_x 与 p 比较是微不足道的, 因此轨道概念近似成立, 此时电子的宏观运动可用经典力学来处理。

当电子在原子范围内运动, 这时电子的位置 (从原子核算起) 的量级为

$$x \sim a_0 \sim 0.52917 \times 10^{-10} \text{ m} \text{ (玻尔半径)}$$

电子动能的量级约为 10 eV , 因此

$$p = \sqrt{2m_e \times 10 \text{ eV}} \sim 1.7 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$x \cdot p \sim 8.5 \times 10^{-35} \text{ J} \cdot \text{s} \sim \hbar$$

由于 $\Delta x \cdot \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}$ 的限制, 已经不可能同时使 $\Delta x \ll x$, $\Delta p_x \ll p$, 亦即经典轨道概念不再适用。

10.5 锂和汞的逸出功分别为 2.3 eV 和 4.5 eV , 如果用波长为 300 nm 的光照射, 试问哪种材料会出现光电效应? 光电子的最大动能为多少?

分析: 已知的波长决定了入射光子的能量, 将这一能量值与材料的逸出功比较就可以判断能否出现光电效应。入射光子的能量一部分用于逸出功 W , 另一部分即为光电子的初动能。

解: 入射光的能量为

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 3.00 \times 10^8}{300 \times 10^{-9}} = 6.63 \times 10^{-19} \text{ J} = 4.13 \text{ eV}$$

可见入射光的能量大于锂的逸出功, 却小于汞的逸出功, 因此锂会产生光电效应。

由爱因斯坦方程, 光电子 ($W_{\text{Li}} = 2.30 \text{ eV}$) 的最大动能为

$$E_k = \frac{hc}{\lambda} - W = (4.13 - 2.30) \text{ eV} = 1.83 \text{ eV}$$

10.6 如果一个电子处于原子某能态的时间为 10^{-8} s , 那么 (1) 该原子在该能态的能量的最小不确定量是多少? (2) 设电子从上述能态跃迁到基态, 对应的能量为 3.39 eV , 试确定所辐射光子的波长及此波长的最小不确定量。

分析: 由海森堡不确定关系, 并应用 $E = p^2 / (2m)$, 可导出能量和时间的不确定关系。

解: (1) 由坐标和动量的不确定关系 $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, 并应用 $E = p^2 / (2m)$, 两端求微分, 有

$$\Delta E = 2p \Delta p / (2m) = v \Delta p$$

及应用 $\Delta t = \Delta x / v$, 得到能量测量的不确定量 ΔE 和时间的不确定量 Δt 满足的不确定关系, 为

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

所以, 当时间最大不确定量为 $\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$ 时, 能量的最小不确定量为

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{1.054 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-8}} = 0.329 \times 10^{-7} \text{ eV}$$

(2) 又由 $E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$ 得 $\lambda = \frac{hc}{E}$, 所以

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6.6256 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{3.39 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 367.0 \text{ nm}$$

由 $E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$, 两端微分有 $|\Delta E| = \frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda$

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{hc} \Delta E = \frac{(367 \times 10^{-9})^2}{6.6256 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} \times 3.29 \times 10^{-8} \times 1.6 \times 10^{-19} = 3.56 \times 10^{-6} \text{ nm}$$

10.7 一个电子的总能量是它的静止能量的 5 倍, 问它的速率、动量、动能各为多少?

分析: 根据质能关系, 电子的总能量 E 与静能 E_0 之比等于其动质量与静质量之比, 由相对论质量与速度的关系可求出速度, 进而求出电子的动量, 电子的动能等于总能量与其静能之差。

解: 由质能关系 $E = mc^2$ 和 $E_0 = m_0 c^2$, 可知

$$\frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = 5$$

由 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, 求得电子速率为

$$v = \frac{\sqrt{24}}{5} c = 2.9 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

电子动量

$$p = mv = \sqrt{24} m_0 c = 1.34 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

电子能量

$$E_k = E - E_0 = 4m_0 c^2 = 3.28 \times 10^{-13} \text{ J}$$

10.8 求出能够占据一个 d 分壳层的最大电子数, 并写出这些电子的 m_l 和 m_s 的值。

分析: 由泡利原理, 可知原子内角量子数 l 分壳层最多能容纳的电子数。当 l 确定后, m_l 的可能值为 $-l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$, 共 $2l+1$ 个, 当 n, l, m_l 都给定时, m_s 取 $\frac{1}{2}$ 和取 $-\frac{1}{2}$ 两个可能值。

解: d 分壳层就是角量子数 $l=2$ 分壳层, 所以, d 分壳层的最大电子数为

$$Z_l = 2(l+1) = 10$$

这些电子的 m_l 和 m_s 的值为

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2 \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

10.9 设一个氢原子处于第二激发态, 试根据玻尔理论计算: (1) 电子的轨道半径; (2) 电子的角动量; (3) 电子的总能量。

分析: 相应于第二激发态的量子数 $n=3$, 氢原子的基态电子轨道半径 $r_1 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$, 基态能量 $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ 。

解: (1) 电子轨道半径为 $r_n = n^2 r_1$, 则第二激发态的电子轨道半径为

$$r_3 = n^2 r_1 = 3^2 \times 0.529 \times 10^{-10} = 4.76 \times 10^{-10} \text{ m}$$

(2) 根据玻尔的电子角动量量子化假设, 角动量为 $L_n = n \cdot \hbar$

$$L_n = n \cdot \hbar = 3 \cdot \frac{h}{2\pi} = 3 \times \frac{6.626 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14} = 3.16 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 电子的总能量为 $E_n = \frac{E_1}{n^2}$

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} = \frac{-13.6 \text{ eV}}{3^2} = -1.51 \text{ eV}$$

10.10 若电子和光子的波长均为 0.20 nm , 则它们的动量和动能各为多少?

分析: 光子的静止质量 $m_0 = 0$, 静能量 $E_0 = 0$, 其动能、动量可由德布罗意关系式

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda} \text{ 求得。}$$

解: 由于光子与电子的波长相同, 它们的动量均为

$$p = \frac{h}{\lambda} = 3.32 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

光子的动能

$$E_k = E = pc = 6.22 \text{ keV}$$

而对电子来说, 动能 $E_k = E - E_0 = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} - m_0 c^2 < pc$ (6.22 keV), 且远小于 E_0 ($mc^2 = 0.512 \text{ MeV}$)。即 $E_k \ll E_0$, 因而可以不考虑相对论效应, 电子动能直接用 $E_k = p^2 / 2m_0$ 计算。即

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = 37.8 \text{ eV}$$

10.11 钾的遏止频率为 $4.62 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ，今用波长为 435.8 nm 的光照射，求从钾的表面上放出的光电子的初速度。

分析：根据光电效应的爱因斯坦方程及逸出功和频率波长关系，可求出光电子的初速度。

解：根据光电效应的爱因斯坦方程，有

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + W$$

其中 $W = h\nu_0$ ， $\nu = c/\lambda$ ，可得电子的初速度

$$v = \left[\frac{2h}{m} \left(\frac{c}{\lambda} - \nu_0 \right) \right]^{1/2} = 5.74 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

10.12 求速度 $v = \frac{c}{2}$ 的电子的物质波的波长。

分析：可直接由德布罗意关系求解。

解：设电子的静质量为 m_0 ，当电子的速度 $v = \frac{c}{2}$ 时，电子的动量 $p = m_0 v = m_0 \frac{c}{2}$ ，所以电子的物质波波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.6256 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times \frac{3}{2} \times 10^8} = 0.004856 \text{ nm}$$

10.13 在宽度为 a 的一维无限深势阱中，当 $n=1, 2, 3$ 时，求介于阱壁和 $a/3$ 之间粒子出现的概率。

分析：求出粒子在一维无限深势阱中波函数，则可由波函数的统计意义，求出粒子与能量对应的在势阱中的几率密度。

解：假设粒子沿 x 轴做一维运动，且势能具有如下形式：

$$V(x) = 0, \quad (0 < x < a)$$

$$V(x) = \infty, \quad (x \leq 0, x \geq a)$$

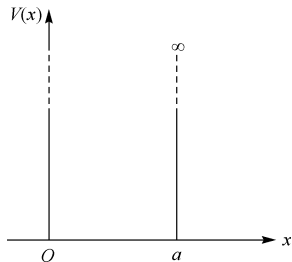


图 10.5 习题 10.13 图

相应的势能曲线如图 10.5 所示。由于 $V(x)$ 与时间无关，

因此在势阱中运动的粒子处于定态，可以用一维定态薛定谔方程求解。

在 $x \leq 0$ 和 $x \geq a$ 的区域内， $V(x) = \infty$ ，具有有限能量的粒子不可能出现，因此波函数

$$\Psi(x) = 0$$

在 $0 < x < a$ 的区域内，定态薛定谔方程为

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi(x) = 0$$

令 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, 则上述方程变为

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + k^2\Psi(x) = 0$$

此方程的通解为

$$\Psi(x) = A\sin(kx + \delta)$$

其中 A 和 δ 为待定常数, 由波函数的连续性确定, 所以

$$\begin{aligned} \Psi(0) &= 0 & \text{即} & \sin\delta = 0 \\ \Psi(a) &= 0 & & \sin(ka + \delta) = 0 \end{aligned}$$

解之可得 $\delta = 0$, $ka = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$

由于 $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, 于是有

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

n 是主量子数, 它可取 $n = 1, 2, 3, \dots$ 诸正整数, 应该说明的是 n 不能取零, 如果 $n = 0$ 则 $k = 0$, 这时在势阱内 $\Psi(x)$ 恒为零, 表示阱内处处都没有粒子, 这显然不满足归一化条件。用能量 E 描述粒子的状态时, 能量只能取分离值 E_n , 即粒子的能量是量子化的, 并且与每个能量值所对应的波函数为

$$\Psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

至于待定常数 A , 可用归一化条件确定, 由于粒子被限制在势阱内出现, 所以有

$$\int_0^a |\Psi_n(x)|^2 dx = \int_0^a A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{1}{2} A^2 a = 1$$

所以 $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ 。即有

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

综上所述, 粒子在一维无限深势阱内运动时, 其波函数为

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= 0, & (x \leq 0, x \geq a) \\ \Psi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), & (0 < x < a), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

所以, 与能量 E 对应的粒子在势阱中的几率密度为

$$|\Psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

当 $n=1,2,3$ 时, 介于阱壁和 $a/3$ 之间粒子出现的概率为下列积分^①

$$\int_0^{a/3} |\psi_1(x)|^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

$$\int_0^{a/3} |\psi_2(x)|^2 dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi}$$

$$\int_0^{a/3} |\psi_3(x)|^2 dx = \frac{1}{3}$$

10.14 He-Ne 激光器所发红光波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, 谱线宽度 $\Delta\lambda = 10^{-9} \text{ m}$, 求当这种光子沿 x 方向传播时, 它的 x 坐标的不确定度 (即波列长度)。

分析: 光子亦具有波粒二象性, 所以满足不确定关系。本题先根据不确定关系导出一个光子坐标的不确定度与其状态 (λ 和 $\Delta\lambda$) 之间的关系。

解: 由光子的动量与波长 (沿 x 轴方向) 关系 $p = \frac{h}{\lambda}$, 两边微分可得光子动量不确定量的大小为

$$|\Delta p| = \frac{h^2}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

式中 $\Delta\lambda$ 即为谱线宽度, 根据不确定关系

$$\Delta x \Delta p = \Delta x \cdot \frac{h^2}{\lambda^2} \Delta\lambda \geq \frac{h}{2}$$

可得到光子沿 x 轴方向的不确定度

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} = 3.19 \times 10^4 \text{ nm}$$

式中 $\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ 为相干长度 (即波列长度), 该式说明激光光子坐标的不确定量就是波列长度, 由于波列长度很大, 因而激光是相干性极好的新型光源。

10.15 已知巴耳末线系的最短波长是 365 nm , 由此求里德堡常量。

分析: 由于在巴耳末线系中, 谱线是从 $n > 2$ 的各较高能级向 $n' = 2$ 的能级跃迁时产生的谱线, 而最短波长的谱线只能是 $n \rightarrow \infty$ 远跃迁到 $n' = 2$ 。

解: 由巴耳末公式

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

将 $\lambda (= 365 \text{ nm})$ 代入, 则有

① $\int \sin^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$

$$R_H = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{4}{\lambda} = 1.096 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

- 10.16 一个质子在一维无限深势阱中, 阱宽 $a = 10^{-14} \text{ m}$ 。(1) 质子的零点能量多大?
(2) 由 $n = 2$ 态跃迁到 $n = 1$ 态时, 质子放出多大能量的光子。

分析: 一维无限深势阱粒子的基态 ($n = 1$) 能量即为零点能。因此只要从一维无限深势阱粒子的能级表达式 $E_n = \frac{h^2}{8ma^2} n^2$, 可得粒子基态 (最小) 能量。

解: (1) 由一维无限深势阱粒子的能级表达式, 有

$$E_1 = \frac{h^2}{8ma^2} = 3.29 \times 10^{-13} / 1.6 \times 10^{-19} = 2.05 \times 10^6 \text{ eV}$$

(2) 由 $n = 2$ 态跃迁到 $n = 1$ 态时, 质子放出光子的能量为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = (4 - 1) \frac{h^2}{8ma^2} = 9.87 \times 10^{-13} / 1.6 \times 10^{-19} = 6.17 \times 10^6 \text{ eV}$$

10.17 试计算处于基态的氢原子的电离能和从基态 E_1 激发到第一激发态 E_2 必需提供的能量。

分析: 由玻尔氢原子理论, 当电子在半径为 a_n 的轨道上运动时, 氢原子系统的能量 E_n 等于原子核与轨道电子这一系统的静电势能与电子动能之和, 若以电子在无穷远处的静势能为零, 则

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}, \quad (\text{其中 } r_n = n^2 \left(\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \right) = a_0 n^2)$$

使氢原子电离需要的能量就是把氢原子中处于基态 ($n = 1$) 的电子移到无穷远处 ($n = \infty$) 所需的能量。

解: 使氢原子电离需要的能量为

$$E_{\text{电离}} = E_\infty - E_1 = 13.6 \text{ eV}$$

若要把一个原子从基态 E_1 激发到第一激发态 E_2 , 必须提供的能量为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 10.2 \text{ eV}$$

讨论: 普通气体分子热运动的动能为 0.0252 eV , 这比 10.2 eV 小得多, 所以分子之间的碰撞不足以影响原子的稳定性。

10.18 同习题 10.13, 设粒子处于基态 ($n = 1$), $E_1 = (\pi\hbar)^2 / 2ma^2$ 。设 $t = 0$ 时刻阱宽突然变为 $2a$, 粒子波函数来不及改变, 即

$$\psi(x, 0) = \psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

试问: 对加宽了的无限深方势阱

$$E_p(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \infty, & |x| \geq a \end{cases}$$

$\psi(x, 0)$ 是否还是能量本征态? 求测得粒子处于能量本征值 E_1 的概率密度。

分析: 对于宽为 a 的一维方势阱, 其粒子处于基态 ($n=1$) 时, 能量 $E_1 = (\pi\hbar)^2 / 2ma^2$ 。当势阱宽突然变为 $2a$, 可求解此一维定态薛定谔方程, 从而得到势阱加宽后的能量本征值和能量本征态, 再与没加宽前的粒子能量的本征值和能量本征态比较。

解: 仿习题 10.13 方法, 求解粒子在宽为 $2a$ 的一维无限深势阱中运动的定态薛定谔方程, 得能量本征值及能量本征态

$$\varepsilon_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a}, & |x| < 2a \\ 0, & |x| > 2a \end{cases}$$

此能量本征值和能量本征态与宽为 a 的一维无限深势阱中运动粒子的能量本征值和能量本征态不一致, 所以 $\psi(x, 0)$ 不是宽为 $2a$ 的能量本征态。

能量本征值 E_1 对应的粒子在宽为 $2a$ 的势阱中的概率密度相当于 $\varepsilon_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$ 中 $n=2$ 时的概率密度, 即为

$$|\varphi_2(x)|^2 = \frac{1}{a} \sin^2 \frac{\pi x}{a}$$

第 11 章 分子与固体 现代高新技术

物理化学已经阐明各种物体是由最小元素构成的，原子是元素的最小单元，各种元素其原子的结构与性质是有差异的，也就是原子说保持物质性质的最小单元。例如，碳、铁、铜都是元素，它们的最小单元分别是碳原子、铁原子和铜原子，这几种原子有各自的结构和特性，它们可以被击破，但击破后的粒子就没有碳、铁、铜的特性了。事实上，所有物质最终都是由几种基本粒子构成的，这几种基本粒子怎样构成多种多样的、具有各种元素特性的原子，在原子物理学中有详细的介绍。本章主要介绍固态物质的各种物理性质，从离孔子的结合与离子晶体出发，给予一定的讨论。固体区别于气体和液体的特点，在于其组成粒子（可以是原子、离子、分子或它们的集团）的空间位置在没有外力作用时大多不会有宏观尺度的变化，在低温下基本处于固定的位置。也正是根据组成粒子空间位置的差别，即物质结构上的差别，通常将固态材料划分为 3 类：晶体、准晶体和非晶体。

11.1 学习要求

1. 晶体结构

- (1) 了解晶体、非晶体的概念；了解晶体的周期性。
- (2) 理解点阵、基元、原胞的基矢、晶胞、Wigner-Seitz 原胞。
- (3) 了解晶体的对称性；理解典型的晶体结构。

2. 固体的能带结构

- (1) 理解电子的共有化概念，能带的形成。
- (2) 了解满带、导带和禁带的概念。
- (3) 了解导体、半导体和绝缘体。

3. 团簇和纳米材料

- (1) 了解纳米材料。
- (2) 了解纳米技术。
- (3) 了解扫描隧道显微镜 STM、激光器。

11.2 内容提要

1. 基本概念

- (1) 晶体与非晶体

① 晶体：晶体结构的显著特点就是粒子（原子）排列规则，具有排列的周期性，这种周期的阵列称为点阵或格子，如氯化钠、金刚石、铁、铜。其宏观性质包括规则的外形、一定的熔点、各向异性、晶面角守恒、解理性，即具有周期性（长程有序）。一种晶体的物理性质与其组成的元素有关。也要注意，即使是同种元素构成的不同晶体，也会表现出不同的特性。例如，同为碳元素组成的石墨、碳 60 和金刚石就具有明显不同的性质。

② 非晶体：构成物体的粒子不具有排列的周期性，即没有长程周期性（如玻璃、橡胶、松香等）。

③ 晶体的配位数：晶体中一个原子周围近邻的原子数称为配位数。可用来表征原子排列的紧密程度，最紧密的堆积称为密堆积，密堆积对应最大的配位数。例如，不论是六角还是立方密堆积，晶体的配位数都必须是 12，即任意一个原子球与最近邻的 12 个原子相切。又如，一维晶格的配位数为 2，如图 11.1 所示。



图 11.1 一维晶格的配位数

（2）晶体的周期结构（基元、格点、晶格）

晶体结构的显著特点就是粒子排列的周期性，这种周期性的阵列称为点阵或晶格，晶格是晶体结构的数学抽象，即“点”在空间的周期性排列，其中每个“点”均为实际晶体中粒子的抽象，称为格点。在具体的晶体中，每个粒子都是在空间重复排列的最小单元，称为基元。基元中往往包含一个或几个原子、离子或分子。因此，点阵中的点即实际晶体中“基元”的抽象，如同将一个物体抽象成一个质点；而实际晶体结构与点阵和基元的关系可概括地表示为

$$\text{晶体结构} = \text{点阵} + \text{基元} \quad (11-1)$$

所谓点的周期性阵列，即若将晶体结构看作是在三维空间无限延伸的，那么任何一个点周围的情形都是完全相同的，这正是周期性的精髓所在。通常将这种点的周期性阵列称为布拉维（Bravais）点阵或格子，而点即为格点。于是，实际的晶体即可看成全同的基元安置在布拉维格点上。图 11.2 所示为二维晶格、格点、基元示意图。

（3）原胞的基矢

由于布拉维点阵的周期性，每一个格点在空间所“拥有”的体积都一样，设这一体积为 Ω 。如果以某一格点为原点 O ，则总可以沿三个不共面的方向找到与 O 相连的格点，如图 11.3 所示。设图中 A 、 B 、 C 三点，原点 O 到三点的长度分别为 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} ，并令沿 OA 、 OB 、 OC 的三个矢量为 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 ，这三个矢量所围成的平行六面体中不再包含其他格点，则此平行六面体的体积为

$$\Omega = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \quad (11-2)$$

这一平行六面体涉及 8 个格点，但每个格点同时涉及 8 个彼此相邻的平行六面体。

显然，将此平行六面体沿 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 三个方向作周期重复必能填满全部空间而无任何缺漏。这一平行六面体称为布拉维格子的原胞，而 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 则称为原胞基矢（见图 11.3）。

显然,原胞的必要条件是在其范围内只包含一个格点。对于二维原胞及其基矢选取的任意性如图 11.4 所示。

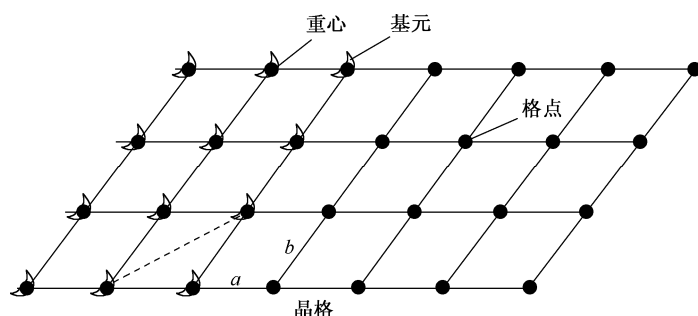


图 11.2 二维晶格、格点、基元示意图

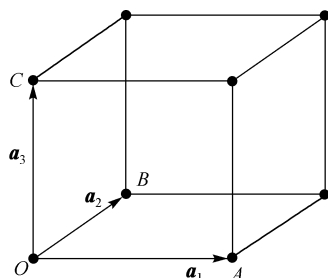


图 11.3 简单立方晶格的原胞与基矢

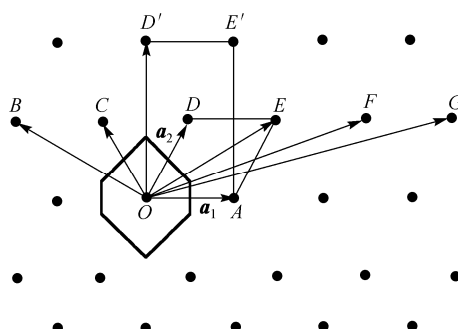


图 11.4 原胞及其基矢选取的任意性(二维)

(4) 晶胞

晶体材料除有周期性,还有对称性。原胞能很好地描述晶体的周期性,但有时却不能兼顾结构的对称性。如图 11.4 所示,选取 $OAED$ 作为原胞,基矢 $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{OA}$ 、 $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{OD}$,但图不能反映矩形的对称性。若选 $OAED'$ 为周期性的重复单元,就能反映矩形的对称性。这样选取的重复单元称为晶胞。沿晶胞边方向且长度与边长相等的矢量称为晶胞基矢,分别用 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 表示,基矢长度称为晶格常数。晶胞可以包含一个以上的结点。原胞是考虑点阵周期性的最小重复单元,而晶胞是同时计及周期性和对称性的尽可能小的重复单元。根据不同的对称性,有的布拉维格子的原胞与晶胞相同;有的形状有明显差别,但后者的体积必为前者的整数倍,这一整数正是晶胞中所包含的格点数。

(5) 典型的晶体结构

布拉维格子描述晶体结构的周期性,至于点阵的形式却并不是任意的。实际上可能存在的格子类型都受到晶体结构对称性的限制。换言之,原胞的形状或原胞基矢 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 彼此的相对取向及长度比要受到对称性的制约。于是,只能有 14 种类型的布拉维格子。以如图 11.4 为例,这一结构具有对 OD' 的反映对称,因此,如果 E 处有一格点,那么, B 处必定有一格点,这就限制了格子的形状。

三维布拉维点阵一共有 14 种,如图 11.5 所示,图中画出的是每一种格子的晶胞。

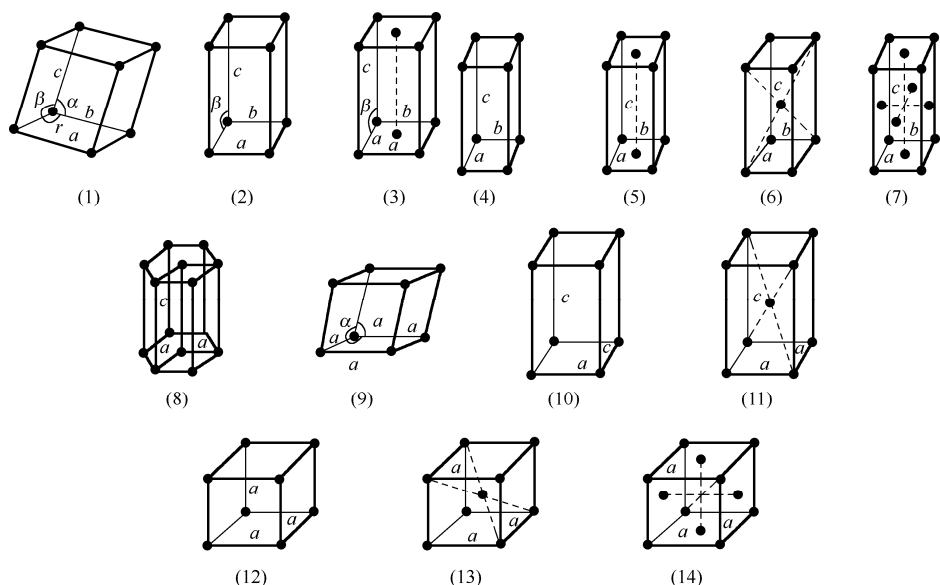


图 11.5 十四种布拉维格子

- (1) 简式三斜; (2) 简式单斜; (3) 底心单斜; (4) 简式正交; (5) 底心正交; (6) 体心正交; (7) 面心正交;
(8) 六角; (9) 三角; (10) 简式四角; (11) 体心四角; (12) 简立方; (13) 体心立方; (14) 面心立方

(6) 七大晶系

考虑到晶格的对称性, 结晶学上选取的重复单元——晶胞不一定是最小重复单元, 晶胞的基矢方向便是晶体晶轴方向, 晶轴上的周期就是基矢的模, 称为晶格常数。根据晶胞基矢的特征, 晶体可分为七大晶系: 三斜晶系、单斜晶系、正交晶系、三角晶系、四方晶系、六方晶系、立方晶系。每种具体的晶系在固体物理一章中有专门的介绍。

2. 固体的能带结构

(1) 电子的共有化

共价结合是靠两个原子各自贡献一个电子, 形成所谓的共价键。氢分子是靠共价结合的典型例子。就其一般而言, 一个价电子原子可以看成由一个电子和一个正离子组成, 电子在正离子的场中运动。根据量子理论, 当这类系统的原子结合在一起时, 可以形成所谓成键态和反成键态。设想有原子 A 和原子 B 是互为近邻的一对原子, 当它们是自由原子时, 它们各有一个价电子, 这时势能曲线如图 11.6(a)所示, 当两个原子很近时, 它们的势能曲线如图 11.6(b)实线所示。对于由大量原子做周期性有规则排列成晶体时, 晶体形成了如图 11.6(c)所示的周期性势场。

为了确定电子在晶体周期性势场中的运动形式, 运用量子力学中归一化波函数 ϕ_A 、 ϕ_B 来求解, 这是一个比较复杂的问题。当两个原子较近时, 波函数交叠, 形成共价键, 这时每个电子均为 A、B 原子共有。当 A、B 两原子是同一种原子时, 两原子自由能级 $\varepsilon_A = \varepsilon_B = \varepsilon_0$ 。但由于它们相互接近, 这时描述电子轨道的波函数就为

$$\begin{aligned}\psi_+ &= C_+(\phi_A + \phi_B) \\ \psi_- &= C_-(\phi_A - \phi_B)\end{aligned}\quad (11-3)$$

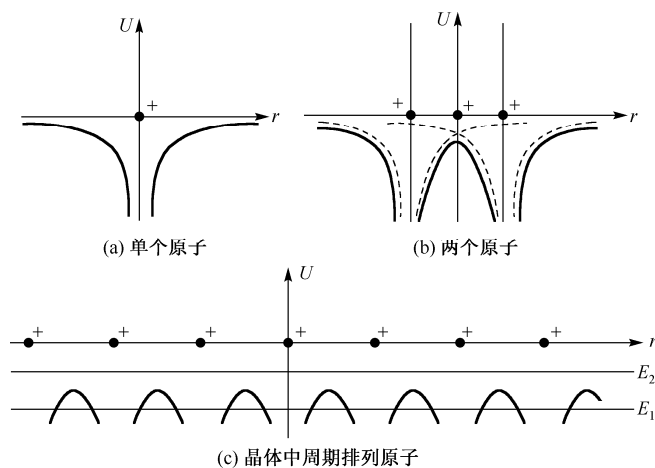


图 11.6 原子晶体中的势场

式中, C_+ 、 C_- 为归一化常数, 通常称 ψ_+ 、 ψ_- 为成键态和反成键态波函数, 成键态能量低于原子能级 ε_0 , 反成键态的能量高于原子能级 ε_0 。亦即这时原子的各个子能级不再具有原先的单一值, 而使两个原子的能量状态具有稍为不同的能量, 使原先的能级分裂成两个相距很近的子能级。

如图 11.6(c)所示, 对于能量为 E_1 的电子来说, 势能曲线代表势垒, 当电子能量低于 E_1 时, 电子将不能越过最大势能(势垒), 这时可认为电子束缚在各自的离子周围。对于具有较大能量(如大于 E_2) 的电子, 当电子能量超过势垒高度, 这时就可以在晶体中自由运动。还有一部分电子略大于 E_1 , 虽然不能越过势垒, 但却可以通过隧道效应进入相邻的原子中去。这样, 电子不在束缚于个别的原子, 而是在整个晶体内运动, 亦即由于晶体中原子的周期性排列而使价电子不再为单个原子所有的现象, 称为电子的共有化。在晶体内出现的一批属于整个晶体原子所共有的电子, 称为共有化电子。

(2) 能带的概念

在周期性结构晶体中, 当 A、B 两原子间的距离很小时, 原子 A 上的电子除受到自身原子核作用外, 还受到另一个靠得很近的原子 B 的作用; 原子 B 也如此。原子间相互作用的结果使得原子的各个子能级不再具有原来的单一值, 而是使两个原子的能量状态具有稍微不同的能量。例如, 当两个氢原子孤立时, 它们的核外电子处于基态(1s 态)。当它们相互靠近形成一个氢分子时, 由于电子的共有化, 氢分子原先的能量 E 分裂为两个相距很近的子能级, 如图 11.7(a)所示。图 11.7(b)所示为晶体中 6 个彼此靠得很近的原子的 1s 态和 2s 态电子的能级分裂。

在理想的周期性结构晶体中, 原子间的间距很小。设晶体由数量巨大的 N 个原子构成, 它们的外层电子被共有化, 使原来处于相同能级上的电子不再具有相同的能量, 而处于 N 个互相靠得很近的子能级上, 由于晶体中原子数目非常大, 这些子能级几乎靠在一起连成一片, 形成所谓的能带。

对于一定的晶体, 不同壳层的电子能级分裂所形成的能级宽度各不相同, 内层电子共有化程度不显著, 能带很窄, 而外层电子共有化程度显著, 能带较宽。能带的符号仍沿用子能级的符号, 如 1s、2s、2p、3s、3p……

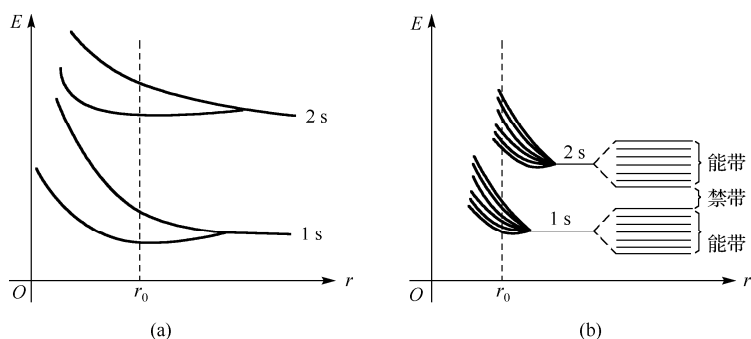


图 11.7 晶体中的能级分裂

(3) 满带、导带与带隙

满带：晶体中电子在各能带上的分布仍然遵从泡利原理和能量最小原理，能级数取决于组成晶体的原子数。例如，有 N 个原子，则 $1s$ 、 $2s$ 轨道上可填充 $2N$ 个电子， $2p$ 、 $3p$ 等 p 轨道上可填充 $6N$ 个电子等。晶体中，电子按照能量从低到高的顺序来填充，每个能级可填入自旋相反的两个电子，如果一个能带中的各个能级都被电子填满，这样的能带称为满带。晶体在外电场中，满带的电子不能起导电作用。

导带：由价电子能级分裂后形成的能带称为价带。若价带中的能级没有全部被电子填满，在外电场作用下，电子可进入能带中未被填充的高能级，且没有反向电子的转移与之抵消，因而形成电流，故这样的能带又称为导带。

空带：其中所有的能级都没有被电子填入，这样的能带称为空带。

带隙：各能带之间的间隔称为禁带，禁带的宽度称为带隙。带隙的宽度对晶体的导电性起着重要作用，有的晶体两个相邻能带可能重合，这时带隙消失。

晶体的能带结构如图 11.8 所示。

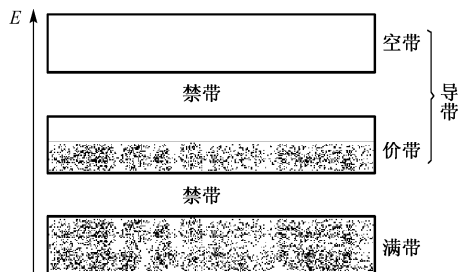


图 11.8 晶体的能带结构图

3. 导体、半导体和绝缘体

(1) 导体、半导体和绝缘体

电阻率在 $10^{-8} \Omega \cdot m$ 以下的物体，称为导体；电阻率在 $10^{-8} \Omega \cdot m$ 以上的物体称为绝缘体；而半导体的电阻率介于导体与绝缘体之间。

(2) 本征半导体和杂质半导体

半导体分为两类，一类称为本征半导体，另一类称为杂质半导体。

本征半导体：纯净的无杂质的半导体称为本征半导体。本征半导体的导电特性是由于

满带中的价电子在热激发或光激发的作用下,由满带跃迁到导带而形成的。这时在导带中出现了电子,而原来充满了价电子的满带,则出现了空状态,这种满带中的空状态称为空穴,空穴等同于一个带 $+e$ 的电荷。

在半导体中掺入杂质可显著地改变半导体的特性。以硅和锗为例,如果在其中掺入百万分之一量级的III族或V族元素,可使其室温电导率增加 $5\sim 6$ 个数量级。

杂质半导体又分为空穴型(p型)半导体和电子型(n型)半导体。

n型半导体:将五价原子(如磷P、砷As)或三价原子(如硼B、铝Al)掺入到四价元素(如硅Si)中,如图11.9(b)和图11.9(c)所示,以磷、硼原子替代硅原子的形式存在,故称之为替位式掺杂。图11.9(b)为掺磷示意图,硅晶体中每个原子有4个最近邻原子,4个价电子与4个近邻原子形成共用电子对的共价键,于是构成最外层具有8个电子的稳定结构。磷替位后,由于磷有5个价电子,其中4个价电子与相邻硅原子形成共价键,第5个价电子所受的束缚较小,它可环绕带正电的离子磷(P^+)运动。这个电子在 P^+ 的电场中的电离能约为 0.045 eV 。它比硅的禁带宽度($E_g = 1.09\text{ eV}$)要小很多。也即只需远小于禁带宽度的能量就能使这一电子脱离 P^+ 的束缚而在晶体中自由运动。与此同时,磷原子被电离成一价正离子。这时,在半导体的价带和导带之间,产生了一个距导带很近的附加能级,这个能级称为施主能级。而磷(及其他V族元素)为施主型杂质。因为施主能级很靠近导带底,导带底与施主能级间的能量差称为施主电离。通过计算可知,V族元素在硅中的施主电离能在 $0.045\sim 0.039\text{ eV}$ 之间,即施主电离能远小于禁带宽度,所以施主能级上的电子很容易受激发而跃迁到导带上去,参与导电。由于含有施主杂质半导体的载流子为电子,通常就将掺有施主杂质的半导体称为n型半导体。

p型半导体:如以硼代替硅原子,则由于其外层只有三个价电子,与近邻形成完整的共价键缺一个电子。此时,近邻硅原子上的价电子不需多大能量便能来填补这一空缺而在自身位置留下一个电子缺位,如图11.9(c)所示。由于硅原子的价电子处于价带中,硅原子共价键上的电子缺失对应于价带中出现一个带 $+e$ 电荷的空穴。这个空穴在带 $-e$ 电荷的硼离子作用下,将环绕硼离子(B^-)。计算表明:室温下的热能足以使空穴在(B^-)的电场中电离,电离能约为 0.045 eV 。当然也比硅的禁带宽度($E_g = 1.09\text{ eV}$)要小很多。这时,同样在半导体的价带和导带之间,产生一个附加能级,这个能级的存在可为价带提供空穴,也可认为它接受来自价带的电子。故这个能级称为受主能级,而硼这类三价杂质则为受主杂质。因为受主能级很靠近价带,所以价带中的电子很容易因激发而跃迁到受主上去,并在价带中留下空穴,而空穴在电场的作用下要发生移动,参与导电。由于含有受主杂质半导体的载流子为空穴,通常就将掺有受主杂质的半导体称为p型半导体。

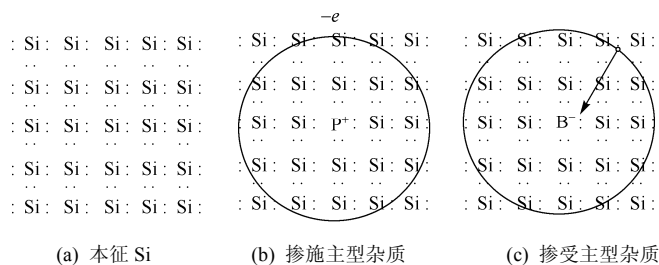


图 11.9 本征 Si 与掺杂 Si 示意图

施主能级和受主能级如图 11.10 所示, 图中施主杂质能级为 E_d , 受主杂质能级为 E_a 。则 $E_c - E_d$ 为施主电离能, $E_a - E_v$ 为受主电离能。施主电离能与受主电离能都可用类氢模型估算, 为

$$E_i = \frac{m^* e^4}{8\pi\epsilon_0^2 \epsilon_s^2 h^2} = \left(\frac{m^*}{m}\right) \frac{1}{\epsilon_s^2} \times 13.6 \text{ eV} \quad (11-4)$$

式中, ϵ_s 为硅晶体的相对介电常数, m^* 为导带中的有效质量 (以电子质量为单位)。注意在计算受主电离能时, 用价带顶的空穴有效质量 m_h 代替上式中导带中的有效质量 m^* 。

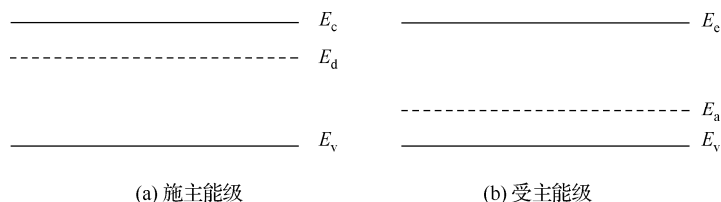


图 11.10 施主能级和受主能级

pn 结: 使 p 型半导体和 n 型半导体相接触, 它们交界处的结构称为 pn 结。由于电子和空穴的密度在两类半导体中并不相同, p 区空穴多电子少, n 区电子多空穴少, 因此, 在两区交界处的多数载流子将向另一区扩散, 如图 11.11(a)所示, 使在交接处形成正负电荷的积累, 由于这个积累电荷而在交接处形成一电偶层, 如图 11.11(b)所示。由于这个电偶层的存在, 在 p 型和 n 型相接触区域内, 也就产生由 n 指向 p 的电场, 从而阻止空穴、电子的进一步扩散, 直至达到动态平衡为止。这时, 在 p 型和 n 型相接触区域就存在如图 11.11(c)所示的电势变化情况。图中 U_0 为动态平衡时, p、n 势垒的高度。因而无论是空穴或电子都需要克服势垒 U_0 的高度才能通过偶电层进入 n 区或 p 区。

实验证明: 对 pn 结两端如果不加电压, 半导体中没有电流; 当 pn 结正向连接, 即把正极接 p 端, 负极接 n 端, 就有电流通过, 且电流为正值 $I > 0$, 该电流称为正向电流; 当反向连接时, 即把正极接 n 端, 负极接 p 端, 这时有反向电流 $I < 0$, 且绝对值较正向电流小, 如图 11.12 所示。

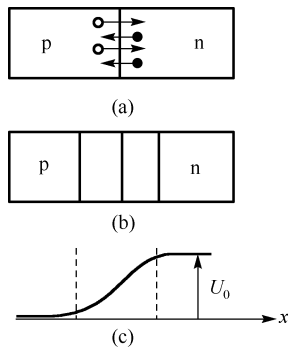


图 11.11 pn 结示意图

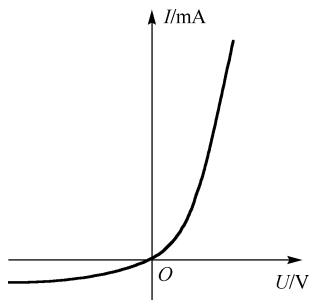


图 11.12 pn 结的伏安特性

4. 纳米材料

(1) 纳米概念

纳米(nanometer)是长度单位($1\text{nm}=1\times 10^{-9}\text{m}$)。纳米微粒也称为超细颗粒,是线度在 $1\sim 100\text{nm}$ 范围的小颗粒,肉眼和普通显微镜是看不到的,所以也有定义:用电子显微镜(TEM)能看到的微粒称为纳米微粒。

1962年,久保(R.Kubo)指出金属超细颗粒有一些特点:一是颗粒线度甚小,其电子能级不再是准连续谱,而是离散的,能级间距随微粒的减小而增大;二是电子总数少,在有限个能级中分布;三是颗粒直径 d 很小,在颗粒上增减一个电子需要静电能量有相应的变化,为

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (11-5)$$

式中, d 很小时, U 可远大于 $k_{\text{B}}T$ (k_{B} 为玻尔兹曼常数, T 为热力学温度),于是孤立颗粒电子数不会有涨落,即通常微粒是保持为电中性的。

(2) 纳米材料的特性及应用

纳米超微颗粒有很高的“比表面积”,这使其表面具有很高的活性。如在空气中,纳米金属颗粒会迅速氧化而燃烧。利用表面活性,金属超微颗粒有望成为新一代的高效催化剂、贮气材料和低熔点材料。

所有金属在超微颗粒状态时都呈现为黑色,尺寸越小,颜色越黑。金属超微颗粒对光的反射率很低,通常可低于1%,大约几微米厚度的膜就能起到完全消光的作用。利用这个特性可以制造高效率的光热、光电转换材料,以很高的效率将太阳能转变为热能、电能。另外还有可能应用于红外敏感元件、红外隐身材料等。

大尺寸的固态物质的熔点往往是固定的,超细微化的固态物质的熔点却低得多,当颗粒小于 10nm 量级时尤为突出。例如,金的常规熔点为 1064°C ,当其颗粒的尺寸减小到 10nm 时,熔点会降低 27°C ,而减小到 2nm 尺寸时,熔点仅为 327°C 左右。

超微颗粒的小尺寸效应还表现在超导电性、介电性能、声学特性及化学性能等方面。

当热能、电场能或者磁场能比平均的能级间距还小时,就会呈现出一系列与宏观物体截然不同的反常特性,称之为量子尺寸效应。例如,导电的金属在超微颗粒时可以变成绝缘体,磁矩的大小与颗粒中电子是奇数还是偶数有关;比热亦会反常变化;光谱线会产生向短波长方向的移动,这就是量子尺寸效应的宏观表现。在低温条件下,对超微颗粒必须考虑量子效应,原有的宏观规律不再成立。

近年来,人们发现一些宏观物理量,如微颗粒的磁化强度、量子相干器件中的磁通量等显示出隧道效应,称之为宏观量子隧道效应。量子尺寸效应、宏观量子隧道效应将是未来微电子、光电子器件的基础,或者说它们确立了现存微电子器件进一步微型化的极限,当微电子器件进一步微型化时必须要考虑上述的量子效应。

碳纳米管、石墨烯等新材料的物性及应用也得到进一步的研究。

(3) 纳米材料的应用与展望

纳米材料在微电子器件和通信、纳米医疗、化学和材料、能源、飞机航天等领域已被广泛地应用。总之,纳米材料被誉为21世纪最有前途的材料,具有广泛的应用前景。

11.3 重点难点分析

1. 本章重点

本章重点介绍固态物质的简单概念及简单的物理性质，如晶体的分类（共价晶体、离子晶体、金属晶体、分子晶体等）。重点是晶体结构的显著特点——原子的规则排列，且具有排列的周期性，体会这种周期阵列（点阵或格子）以及晶体的宏观性质。真正体会“晶体结构 = 点阵 + 基元”关系式的物理意义。

2. 本章难点

由于没有详细介绍有关晶体旋转、对称等系列概念，因而对 14 种三维布拉维点阵的理解会有一定的难度。这部分知识可以参考固体物理相关教材。另外对固体的能带结构、半导体材料的掺杂、纳米材料的特性及应用等，这些与现代科学和技术相联系的问题，理解起来有一定的困难，建议同学可先从网上查找相关概念及知识，然后再找专门教材详细阅读。

11.4 精选例题与习题解答

1. 精选例题

例 11-1 定义：原子堆积模型中，原子球体积与晶体体积之比为致密度。若晶体中最小重复单元为晶胞，则致密度定义为

$$\eta = \frac{\text{晶胞中原子体积}}{\text{晶体体积}}$$

试由此式计算简立方晶体的致密度。简立方晶体模型如图 11.13 所示。

分析：分别根据晶胞体积和原子体积概念，求出晶体体积和晶胞中原子体积，再由致密度概念计算。

解：设晶胞边长为 a ，则晶体体积 $V = a^3$ ；而原子半径 $r = \frac{a}{2}$ ，则原子球的体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3$ ；一个晶胞内原子球的个数为 $\frac{1}{8} \times 8 = 1$ ，所以，晶胞内原子球的体积为

$$v_c = 1 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

由致密度公式得

$$\eta = \frac{\text{晶胞中原子体积}}{\text{晶体体积}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$$

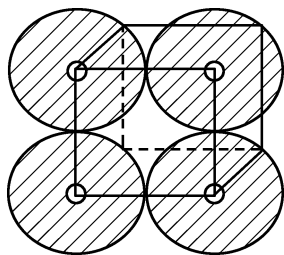


图 11.13 例 11-1 图

例 11-2 已知金属钠的质量密度为 $9.71 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 且每个钠原子只有一个价电子。求: (1) 载流子; (2) 费米能及费米速度。

分析: 由题意, 钠原子数与自由电子数相等。因此, 只要先计算出钠原子的质量, 就可以由已知的金属钠的质量密度求得自由电子浓度 (即载流子浓度), 有了载流子浓度 n , 就可进一步计算出费米能和费米速度。

解: (1) 已知 $\rho = 9.71 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 原子质量 $m_{\text{Na}} = \frac{m_{\text{mol}}}{N_{\text{A}}} = \frac{2.3 \times 10^{-2} \text{ kg}}{6.02 \times 10^{23}} = 3.82 \times 10^{-26} \text{ kg}$,

所以有

$$n = \frac{\rho}{m_{\text{Na}}} = 2.54 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

(2) 费米能和费米速度分别为

$$E_{\text{F}} = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{2m_{\text{e}}} n^{2/3} = 5.05 \times 10^{-19} \text{ J} = 3.15 \text{ eV}$$

$$v_{\text{F}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{F}}}{m_{\text{e}}}} = 1.05 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

例 11-3 证明在高温下 1 mol 原子物质晶体的晶格振动的定容比热为

$$c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3N_0 k_B = 24.9 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

是一常数。

分析: 高温下, 原子在平衡位置附近振动时将其视为简谐振子, 计算振子的平均能量 (动能、势能值的平均值); 同时再考虑晶体有 N 个原胞, 每个原胞有 r 个原子, 从而得到晶体的自由度数, 继而求出 1 mol 原子物质的晶体在温度 T 时的能量。最后由定容比热定义求解。

证明: 设原子在平衡位置附近振动并将其视为简谐振子, 振子离其平衡点的位移 x 随时间 t 的变化为

$$x = A \sin(\omega t + \theta) \quad (1)$$

原子质量为 m , 这样振子的动能、势能分别为

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \theta) \quad (2)$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \theta) \quad (3)$$

由于平均值 $\overline{\cos^2(\omega t + \theta)} = \overline{\sin^2(\omega t + \theta)} = \frac{1}{2}$, 所以, 动能和势能的平均值相等, 为

$$\bar{E}_{\text{kin}} = \bar{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 \quad (4)$$

在高温条件下, 晶体中原子运动可用经典物理的力学和热力学方法来描述。系统在温度 T 时处于热平衡, 每个自由度的平均能量为 $k_B T / 2$ 。故简谐振子的平均能量为

$$\bar{E} = \bar{E}_{\text{kin}} + \bar{E}_{\text{pot}} = k_B T \quad (5)$$

一般情况, 晶体有 N 个原胞, 每个原胞有 r 个原子, 故有 $3rN$ 个简正模式 (自由度), 在热平衡温度为 T 时, 该晶体晶格振动贡献的总内能为

$$U = 3rNk_B T \quad (6)$$

由定容比热的定义, 则晶格振动的定容比热为

$$c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = 3rNk_B \quad (7)$$

通常使用 1 mol 原子物质的定容比热来计量, 这时 $rN = N_0 = 6.023 \times 10^{23}$ (阿伏伽德罗常数), 于是, 摩尔原子定容比热为

$$c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = 3N_0 k_B = 24.9 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

这说明高温晶格比热是一常量, 与温度和物质元素无关。这与杜隆-珀潜定律和实验结果符合。证毕。

2. 习题解答

11.1 解释如下概念: ①何为原胞; ②何为空间点阵。

解释:

① 原胞: 组成晶体的最小重复单元, 设 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 为基矢, 由它们转成的平行六面体称为原胞。

② 空间点阵: 晶体中微粒的重心作周期性排列组成的骨架, 称为晶格, 微粒重心位置称为格点。这些格点的总体称为空间点阵 (简称点阵)。简言之, 空间点阵就是晶体中微粒重心位置的几何点的总体。

11.2 氯化钠与金刚石结构是复式格子还是布拉维格子, 各自的基元为何? 写出这两种结构的原胞与晶胞基矢。设晶格常数为 a 。

分析与解: 图 11.14 为氯化钠结构的晶胞, 不难看出钠离子 Na^+ 与氯离子 Cl^- 各自构成一面心立方格子, 彼此间沿立方边位移立方边长的一半而穿套; 即 NaCl 结构为两个异种离子的面心立方的子晶格套构而成, 是一个复式格子, 其相应的布拉维格子仍为面心立方。如果要确定这种复式格子的原胞可以相对于任一种离子 (例如 Na^+) 画出原胞, 如图 11.14(b) 所示的菱方体。作为一个复式格子, 结构中包含一对离子 (Na^+ 、 Cl^-), 每个原胞恰好包含一个基元。值得注意的是, 虽然 NaCl 结构看上去似乎为一晶胞边长为 $a/2$ 的简立方结构, 但由于 Na^+ 与 Cl^- 不等价, 为异种离子, 不能看成简单格子。

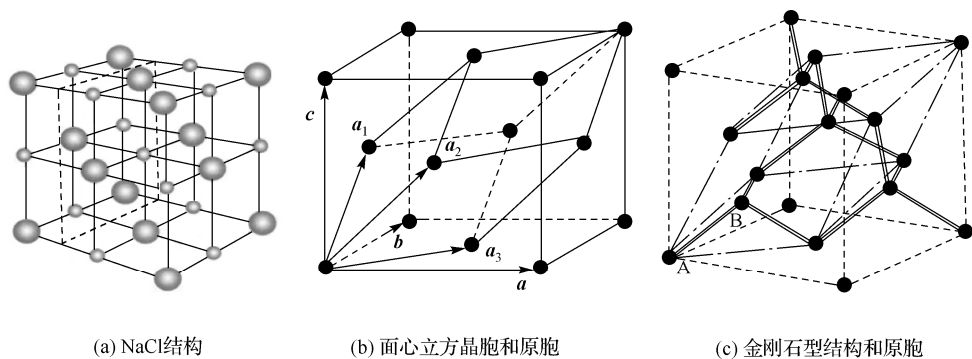


图 11.14 NaCl 型结构、金刚石型结构的晶胞和原胞

金刚石结构也是一个相应的布拉维格子为面心立方的复式格子，只是其基元包含的两个原子都属于同一种元素碳。金刚石结构就是由这两个碳原子的面心立方子晶格沿着立方体对角线的方向彼此移动对角线长度的 $1/4$ 套构而成。值得注意的是，基元虽是由两个同种原子构成，这两个原子却是不等价的，因为这两个原子有不同的周围环境。图 11.14 (c) 中原子 A、B 同属一基元，如果沿着立方对角线的方向观察就可以清楚地看出 A、B 两边的情形是不相同的。金刚石结构的原胞还是如图 11.14(b)所示，在图中用点画线画出，可见如基元中的一个原子位于原胞顶角，另一个原子位于原子内部。由此可见，简单原子中每个原子或离子是等价的；反之，如在晶体结构中发现不等价的离子或原子，这一结构必为复式格子。

NaCl 结构的晶胞基矢为面心立方且长度等于与边长相等的矢量 a 、 b 、 c ，如图 11.14(b)所示。

NaCl 结构原胞为如图 11.14(b)所示的菱方体，原胞基矢为从一个顶点到三个相邻面心的连接矢量 a_1 、 a_2 、 a_3 ，这三条基矢长度相等，均为 $\sqrt{2}/2$ ，若选取沿立方边的单位矢量为 i 、 j 、 k ，则其亦即

$$\begin{cases} a_1 = \frac{a}{2}(j+k) \\ a_2 = \frac{a}{2}(k+i) \\ a_3 = \frac{a}{2}(i+j) \end{cases}$$

同理，分析金刚石的晶胞基矢和原胞基矢。

11.3 求金刚石的致密度 η 。设晶格常数为 a 。

分析：分别根据晶胞体积和原子体积概念，求出晶胞体积和晶胞中原子体积，再由致密度概念计算。金刚石结构是一个相应的布拉维格子为面心立方的复式格子，只是其基元包含的两个原子都属于同一种元素碳。金刚石结构就是由这两个碳原子的面心立方子晶格沿立方对角线的方向彼此移动对角线长度的 $1/4$ 套构而成。因此，很容易计算出晶胞体积。

解：设各碳原子是紧密接触的，由图 11.15 可知，A、B 两原子球相距 $\sqrt{3}a/4$ ，故原子球半径为

$$r = \frac{\sqrt{3}}{8}a$$

晶胞内的原子数为

$$N = 4 + \frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{8} \times 8 = 8$$

晶胞体积 v_c 和晶胞内原子球体积 v_o 分别为

$$v_c = a^3, \quad v_o = \frac{4}{3}\pi r^3 \times 8$$

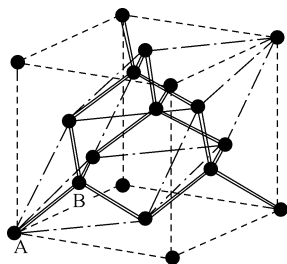


图 11.15 习题 11.3 解图

所以金刚石的致密度为

$$\eta = \frac{v_o}{v_c} = \frac{\sqrt{3}}{16}\pi \approx 0.34$$

11.4 制造半导体元件的纯净锗必须掺入少量杂质原子，设均匀掺杂的比例为 10^{-9} ，若将锗的结构看作为立方点阵，晶格常量设为 0.5 nm ，试估计杂质原子之间的距离。

分析与解：设杂质原子在纯净锗内均匀分布，锗原子密度为 n_1 ，杂质原子数密度为 n_2 ，依据题意，有 $\frac{n_2}{n_1} = 10^{-9}$ 。将锗的结构假设为立方点阵，设锗的晶格常量为 a_1 ，杂质间的距离为 a_2 ，对单位体积，应有 $a_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{n_1}}$ ， $a_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{n_2}}$ ，所以 $a_2 = a_1 \sqrt[3]{\frac{n_1}{n_2}} = 0.5 \mu\text{m}$ 。

11.5 何为本征半导体、n 型半导体、p 型半导体？它们的载流子各是什么？它们的能带结构有何区别？

分析与解：本征半导体：通常人们将电阻率为 $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 以下的材料称为**导体**；电阻率为 $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 以上的物体称为**绝缘体**，而将电阻率介于导体与绝缘体之间的一类材料称为**半导体**。半导体又分为本征半导体和杂质半导体。所谓本征半导体就是指一类**纯净的无杂质的半导体**。从能带结构来看，本征半导体类似于绝缘体，价带为满带，只是价带与导带之间的禁带宽度较绝缘体小。IV 族元素锗、硅以及 III-V 族元素是最常见的典型半导体材料。

详见 11.2 节中第 3 部分的阐述。

11.6 证明理想的 1 维离子晶体晶格中的马德隆常数为 $\alpha = 2 \ln 2$ （已知： $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ， $(-1 < x \leq 1)$ ）。

分析：理想的 1 维离子之间的库仑相互作用是构成离子键“原子间引力”的主要来源，这种晶体中的静电相互作用能一般被称为马德隆能， $2N$ 个离子构成的 1 维理想晶格的马德隆能可以表示为 $U_{\text{库仑}}$ ，由此马德隆能可以求得马德隆常数。

证明：设有 1 维离子晶体，其 A+ 离子与 B- 离子间距为 r ，因此离子间的相互作用能为

$$U_{\text{库仑}} = -n_1 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + n_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_2 r} - n_3 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_3 r} + \dots$$

这里 n_1, n_2, n_3, \dots ，表示最近邻、次近邻及再次近邻……的离子数。因为最近邻为异号离子，

故第一项为负, 第二项为正, 第三项又为负…… r 为正负离子间的最近邻距离, 而 a_2r 及 a_3r 分别表示次近邻及再次近邻离子间的距离。上式也可以写成

$$U_{\text{库仑}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left[n_1 - \frac{n_2}{a_2} + \frac{n_3}{a_3} - \frac{n_4}{a_4} + \dots \right] = -\alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

这里令

$$\alpha = n_1 - \frac{n_2}{a_2} + \frac{n_3}{a_3} - \frac{n_4}{a_4} + \dots$$

α 与具体的晶体结构有关, 称为马德隆常数。对于 1 维离子晶体结构, 可计算得

$$\alpha = 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \right) \approx 2 \ln 2$$

证毕。

11.7^① 在光学波段受激辐射产生激光, 一个必要的条件是粒子数反转, 则实现粒子数反转的典型方法有哪些?

分析: 要实现粒子数反转态, 就要有实现粒子数反转分布的激活介质 (也称为工作介质), 这种物质必须具有适当的能级结构。除此外还必须从外界输入能量, 使激活介质有尽可能多的原子吸收能量后跃迁到高能态。这一能量供应过程称为“激励”, 又称为“抽运”或“光泵”(泵浦源)。激励的方法一般有电激励(电流注入、弧光或辉光放电)、光激励(闪光灯、激光)、气体激励、化学激励、核激励等。

而处于激发态的原子是不稳定的, 平均寿命约为 10^{-8} s, 但有些物质存在比一般激发态稳定得多的能级, 其平均寿命可达到 $10^{-3} \sim 1$ s 的数量级, 这种受激态常称为亚稳态。具有亚稳态的物质有可能实现粒子数反转, 从而实现光放大。

在技术上实现粒子数反转的典型方法一般用三能级系统或四能级系统。

在三能级系统中, E_1 为基态能级, E_2 为亚稳态能级, E_3 为激发态能级。激励能源把 E_1 上的原子抽运到 E_3 上去, 但 E_3 上寿命很短, 其上的原子很快地以无辐射跃迁方式转移到亚稳态 E_2 上, 而在 E_2 态上的原子寿命较长, 这样使 E_2 态的原子数不断增加, E_1 上的原子数不断减少, 于是在 E_2 和 E_1 上的原子实现了原子数的反转。如果这时有一频率满足 $h\nu = E_2 - E_1$ 的外来光子射入, 就会使受激辐射占优势而产生光放大。四能级系统中, E_1 、 E_2 和 E_3 都是激发态, E_2 是亚稳态。将原子从基态 E_0 抽运到激发态 E_3 后, 无辐射跃迁到亚稳态 E_2 上, 这样, E_2 上积累了大量的受激原子, 由于 E_1 不是基态, 其上本来原子数就少, 于是在 E_2 与 E_1 之间就实现了粒子数反转。四能级系统工作模式对粒子数反转的效率

① 在光学波段, 设 E_1 、 E_2 是某原子的任意两个能级, N_1 、 N_2 为两个能级上的原子数。当粒子受到频率为 ν 的光照射时, 若满足 $h\nu = E_2 - E_1$ (h 为普朗克常数), 则原子可能吸收光子向高能态 E_2 (假设 $E_2 > E_1$) 跃迁, 这种过程称为受激吸收; 当处在高能态的原子在自发辐射前, 受到频率为 ν 的外来光波列的刺激诱发作用, 将从高能态 E_2 跃迁到低能级 E_1 时, 同时辐射一个与外来光波列完全相同的光波列, 这个过程叫受激辐射; 在热平衡状态下, 由于在高低能态上的原子数存在 $N_2 < N_1$ 关系, 即处于高能态的原子数远小于低能级的原子数, 这种分布为正常分布。在正常分布下, 受激吸收胜于受激辐射, 在这种情况下是不能实现光放大, 也即不能产生激光。若介质在外界的诱导激励下, 破坏了热平衡, 则可能使 $N_2 > N_1$, 这种分布状态与正常分布相反, 称为粒子数反转态。只有具有合适能级结构的介质才能实现粒子数反转态, 这种介质常称为激活介质。实现粒子数反转态是产生激光的

比较高, 在技术上应用较多, 例如: He-Ne 激光器, CO_2 激光器都采用这种模式。从三能级系统和四能级系统看, 要实现粒子数反转, 激活介质内必须要有亚稳态 (见图 11.16)。

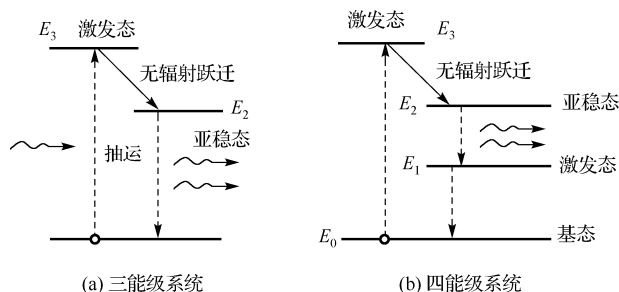


图 11.16 激活介质的工作模式

11.8 晶体的势函数 $U(r)$ 对预测固体的力学性质是非常有用的。晶体的体积弹性模量 K_V 就可以用结合能在平衡点附近的曲率来计算。试证明晶体的体积弹性模量与势函数 $U(r)$ 及原子间作用力参数 n 成正比, 而与原子间距的三次方成反比。

设由 N 对离子构成的离子晶体结合能可以用 1924 年发表的玻恩-迈耶势很好地描述, 其中包含马德隆能和交换相互作用能两项:

$$U(r) = N \left(-\frac{\alpha q_+ q_-}{r} + \frac{b}{r^n} \right) \quad \text{或} \quad U(r) = N \left(-\frac{a}{R} z \lambda e^{R/\rho} \right)$$

式中, α 是马德隆常数, q_+ 和 q_- 分别是正、负离子的电荷, n 是幂次参数。另一套参数 $z\lambda$ 具有能量的量纲, 排斥范围 ρ 具有长度的量纲。

分析: 由晶体的体积弹性模量的定义及压力对体积的变化率。再考虑晶体中含有 N 个原胞, 每个原胞体积在平衡时的体积 V_0 , 最后由势函数关系即可求出。

证明: 根据热力学, 晶体的体积弹性模量的定义为

$$K_V = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$$

式中, V 为晶体的体积, P 为压力。由热力学的基本关系式, 压力 P 与晶体内能有下面关系:

$$P = -\frac{\partial U}{\partial V} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial V}$$

因此, 体积弹性模量 K_V 可表示为

$$K_V = -V \left(\frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \right) = V \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial V} \right)^2$$

当 $T=0$ 时, 原子间的平衡间距为 r_0 。因为是 N 对离子构成的离子晶体结构, 视为 N 个原胞, 每个原胞体积应与 r_0^3 成正比, 因晶体的平衡体积为

$$V_0 = N \beta r_0^3$$

式中, β 为与晶体有关的结构参数。求 $\frac{\partial r}{\partial V} = \frac{1}{3N\beta r} \Big|_{r=r_0}$, 故体积弹性模量 K_V 为

$$K_v = -V \left(\frac{d^2 U}{dV^2} \right) = \frac{r^2}{9V} \left(\frac{d^2 U}{dr^2} \right)_{r_0}$$

若考虑玻恩-迈耶势, 则

$$\left. \frac{dU(r)}{dr} \right|_{r_0} = N \left(\frac{\alpha q_+ q_-}{r_0^2} - \frac{nb}{r_0^{n+1}} \right) = 0, \quad b = \frac{r_0^n}{n} \frac{\alpha q_+ q_-}{r_0}$$

故有 $U(r_0) = -W = -N \frac{\alpha q_+ q_-}{r} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$, W 即为晶体的结合能。代入上面 K_v 的表达式, 则有

$$K_v = -V \left(\frac{d^2 U}{dV^2} \right) = \frac{r^2}{9V} \left(\frac{d^2 U}{dr^2} \right)_{r_0} = \frac{N}{V} \frac{\alpha q_+ q_-}{r_0} \frac{n-1}{9} = \frac{n}{9} \frac{W}{V}$$

由此可见, 晶体的体积弹性模量与势函数 $U(r)$ 及原子间作用力参数 n 成正比, 而与原子间距的三次方成反比。证毕。